日本ソフトウェア科学会第 39 回大会 (2022 年度) 講演論文集

フラット右線形項書き換えシステムの簡約に関する一意正規形性の決定不能性の証明について

趙 順　青戸 等人

項書き換えシステム (TRS) の解の一意性を保証する性質がいくつか知られている．簡約に関する一意正規形性 (UNR) はそのうちの一つである．TRS にフラット，線形などの条件をかけることより，UNR が決定可能となる TRS のクラスを明らかにする試みがされている．一方で，その試みの限界を明らかにするために，どのような TRS のクラスで UNR が決定不能となるかを明らかにする試みもされている．G. Godoy と F. Jacquemard (RTA 2009) は，フラット右線形 TRS の UNR の決定不能の証明を報告したが，その証明の補題の一つには致命的な誤りがあり，その証明は不完全である．本発表では，フラット右線形 TRS の UNR の決定不能性の正しい証明を完成させるために，G. Godoy と F. Jacquemard の証明の詳細な解析を行い，誤っている補題およびその修正について報告する．

1　はじめに

項書き換えシステム (TRS) は等式論理に基づく計算モデルである．項に書き換え規則を適用することで新しい項を得る．項の正規形とは，TRS の中のどの書き換え規則も適用できない項のことである．一般的に，TRS による計算は非決定的であるため，項の正規形は必ず一つとは限らない．TRS の簡約に関する一意正規形性 (UNR) は，正規形の一意性を保証する性質の一つである．一般的に TRS が UNR を持つかどうかは決定不能であるが，TRS にフラットや線形などの制約をかけることより，UNR を持つかどうかが決定可能になることもある．このため，TRS のどのような条件が，UNR の決定可能性と決定不能性の境界となるのかは重要である．

このような研究背景のもとで，フラット右線形 TRS の UNR は決定不能であることが文献[2] により報告されている．フラット右線形 TRS の UNR が決定不能であることから，シャロー TRS，フラット TRS とシャロー右線形 TRS の UNR も決定不能であることも導かれる．このため，フラット右線形 TRS の UNR が決定不能であることを証明する価値は非常に高い [4]．しかし，文献[2] で報告された証明に使われた補題の 2 つに誤りがあり，その証明は不完全である．

本稿ではフラット右線形 TRS の UNR の決定不能性の正しい証明を完成させるために，文献[2] の証明の詳細な解析を行い，誤っている補題およびその修正について報告する．

本稿の構成について説明する．本節では研究の背景と目的について説明した．第 2 節では，本稿で用いる基本概念や記法について述べる．第 3 節では，文献[2] で用いられた証明方針を紹介し，誤った補題とその反例を示す．第 4 節では，文献[2] の証明方針に従い，フラット右線形項書き換えシステムの簡約に関する一意正規形性の決定不能性を証明することを試みる．第 5 節は本稿の結論であり，証明を完成するために残った課題を述べる．

2　準備

項書き換えシステムについては文献[1] の記法を用いる．

On Undecidability of Uniqueness of Normal Forms with respect to Reductions for Flat and Right-Linear TRSs.

Shun Zhao, 新潟大学大学院自然科学研究科, Graduate School of Science and Technology, Niigata University.

Takahito Aoto, 新潟大学自然科学系, Institute of Science and Technology, Niigata University.

2.1 項

関数記号全体の集合を $\mathcal{F}$，変数全体の集合を $\mathcal{V}$，$\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ とする．それぞれの関数記号の引数の個数が決まっているものとし，この数をアリティと言う．アリティが i の関数記号の集合を $\mathcal{F}_i$ と記す．アリティが 0 の関数記号を定数とよび，その集合を $\mathcal{F}_0$ と記す．$ar(f)$ は関数記号 f のアリティを表す．関数記号 f のアリティが i であることを強調したいとき，$f : i$ と書く．$\mathcal{F}$ と $\mathcal{V}$ からなる項の集合を $\mathrm{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と表す．項 t は以下のように帰納的に定義する．

$$t := x \mid c \mid f(s_1, \ldots, s_n)$$

ここで，$x \in \mathcal{V}, c \in \mathcal{F}_0, f \in \mathcal{F}_n, s_1, \ldots, s_n \in \mathrm{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ である．

項 t の根記号を $\mathrm{root}(t)$ と書く．項 t 内に出現した変数の集合を $\mathrm{V}(t)$ で表す．項 t の大きさを $|t|$ と表記し，項 t 内に出現した変数と関数記号の回数の合計を意味する．項 t の高さ $\mathrm{height}(t)$ を次のように定義する：t が変数または定数のとき $\mathrm{height}(t) = 0$，$t = f(t_1, \ldots, t_n)$ のとき $\mathrm{height}(t) = 1 + \max\{\mathrm{height}(t_1), \ldots, \mathrm{height}(t_n)\}$.

空列を ϵ と書く．項の位置 p は正整数列で表す．項 t の全ての位置の集合を $\mathrm{Pos}(t)$ とする．2 つ位置 p, q について，もし，$p = q.r$ を満たすような正整数列 r が存在すれば，$p \geq q$ と記す．$p \geq q$ かつ $p \neq q$ のとき，$p > q$ と記す．$p \not\geq q$ かつ $q \not\geq p$ のとき，$p \parallel q$ と記す．項 t の位置 p にある部分項を $t|_p$ と書く．定数 $\square$ をホールとよび，一つホールを持つ項を文脈 $C[\,]$ とよぶ．特にホールが位置 p にあることを明示したい場合，$C[\,]_p$ と書く．項 t の位置 p をホールに置き換えることで得た文脈を $t[\,]_p$，位置 p のホールを項 u に置き換えた後の項を $t[u]_p$ と書く．

関数 $\sigma : \mathcal{V} \to \mathrm{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ で，集合 $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ が有限であるものを代入とよぶ．代入 σ の準同型拡張 $\hat{\sigma} : \mathrm{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V}) \to \mathrm{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ は次のように定義する：$t \in \mathcal{V}$ のとき $\hat{\sigma}(t) = \sigma(t)$，$t = f(t_1, \ldots, t_n)$ のとき $\hat{\sigma}(t) = f(\hat{\sigma}(t_1), \ldots, \hat{\sigma}(t_n))$．以降，代入 σ と準同型拡張 $\hat{\sigma}$ を同一視し，$\hat{\sigma}$ を使うべき箇所にも σ を使用する．また，便宜上 $\sigma(t)$ の代わりに $t\sigma$ という後置表記を使う．

2.2 項書き換えシステム (TRS)

書き換え規則は，$l \notin \mathcal{V}, \mathrm{V}(r) \subseteq \mathrm{V}(l)$ を満たすような 2 つの項 l, r の対であり，$l \to r$ と記し，l と r をそれぞれ書き換え規則の左辺と右辺と言う．項書き換えシステム (TRS) は，有限個の書き換え規則の集合である．

TRS $\mathcal{R}$ において，ある書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$，代入 σ，文脈 $C[\,]_p$ に対して，$s = C[l\sigma]_p$ かつ $t = C[r\sigma]_p$ が成立するとき，s から t へ書き換えたといい，$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{} t$ と書く．特に，書き換える位置 p や書き換え規則 $l \to r$ と代入 σ を明示したい場合，$s \xrightarrow[p, l \to r, \sigma]{} t$ と書くこともある．$\to$ の推移閉包，反射推移閉包と反射対称推移閉包を $\xrightarrow{+}, \xrightarrow{*}$ と $\xleftrightarrow{*}$ と書く．

TRS $\mathcal{R}$ において，$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{} t$ となるような項 t が存在しないとき，項 s を正規形とよぶ．$\xrightarrow[\mathcal{R}]{}$ に対する正規形の集合を $\mathrm{NF}_{\mathcal{R}}$ と記す．$t \in \mathrm{NF}_{\mathcal{R}}, s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t$ のとき，項 t を項 s の正規形とよぶ．TRS $\mathcal{R}$ は簡約に関する一意正規形性 (UNR) を持つとは，任意の項 s，任意の正規形 t, u について，$t \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} u$ なら，常に $t = u$ が成立することである．

項 t について，$\mathrm{height}(t) \leq 1$ のとき，項 t をフラット項と言う．同じく，項 t の中に出現した変数がそれぞれ高々1 回のとき，項 t を線形項と言う．項 t の中に，変数が出現しないとき，項 t を基底項と言う．書き換え規則の両辺ともフラット (線形，基底) 項のとき，フラット (線形，基底) 書き換え規則と言い，右辺 (左辺) のみフラット (線形，基底) 項の場合，右 (左) フラット (線形，基底) 書き換え規則と言う．TRS において，すべての書き換え規則がフラット (線形，基底) なら，フラット (線形，基底)TRS と言い，右 (左) フラット (線形，基底)TRS も同様に定める．

TRS $\mathcal{R}$ において，2 つの項 s, t が交差する (*joinable*) とは，$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} u$ かつ $t \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} u$ を満たすような項 u が存在するときである．

2 つ同じ変数を持たない書き換え規則 $l \to r, l' \to r'$ とする．l' のある非変数部分項 $l'|_p$ について $l'|_p\sigma = l\sigma$ となるとき，$l \to r$ は $l' \to r'$ に重なるという．

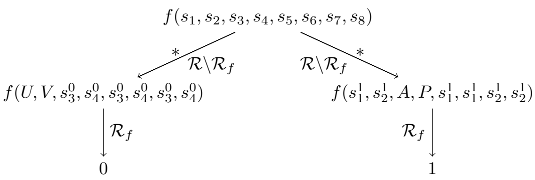

図 1　正規形 $0, 1$ への書き換え図

3　文献 [2] の証明方針と証明の誤り

本節では，文献 [2] で報告されたフラット右線形 TRS の UNR の決定不能性の証明方針を紹介し，誤った補題とその反例を示す．

3.1　rPCP 問題

有限なアルファベット Γ において，任意の $u_i, v_i \in \Gamma^* \backslash \{\epsilon\}$ を満たすような非空文字列の対 $\langle u_1, v_1 \rangle, \ldots, \langle u_n, v_n \rangle$ が与えられたとする．このとき，$u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ を満たすような非空正整数列 $i_1 \cdots i_k$ は存在するか，という問題を rPCP 問題という．文字列 u_i, v_i の j 番目の記号が存在するとき，その記号を u_{ij} と v_{ij} と書く．

3.2　証明方針

rPCP 問題は決定不能であることが知られている [3]．任意に与えられた rPCP 問題からフラット右線形 TRS を構成し，その TRS が UNR を持たないことと与えられた rPCP 問題には解があることとの等価性を示せば，フラット右線形 TRS が UNR を持つかという判定問題は決定不能であることが言える．

文献 [2] では，正規形を $0, 1$ の 2 つしか持たず，さらに，フラット右線形書き換え規則しか使えないような TRS $\mathcal{R}$ を rPCP 問題から構成する方法を示した．正規形 $0, 1$ への書き換えのイメージ図は図 1 である．

文献 [2] で与えられた,「rPCP 問題は解があること $\Longrightarrow$ TRS $\mathcal{R}$ が UNR を持たないこと」の証明には問題はない．一方,「TRS $\mathcal{R}$ が UNR を持たないこと $\Longrightarrow$ rPCP 問題は解があること」の証明にはギャップがある.「TRS $\mathcal{R}$ が UNR を持たないこと $\Longrightarrow$ rPCP 問題は解があること」の証明の方針を，図 2 を用いて簡単に説明する．

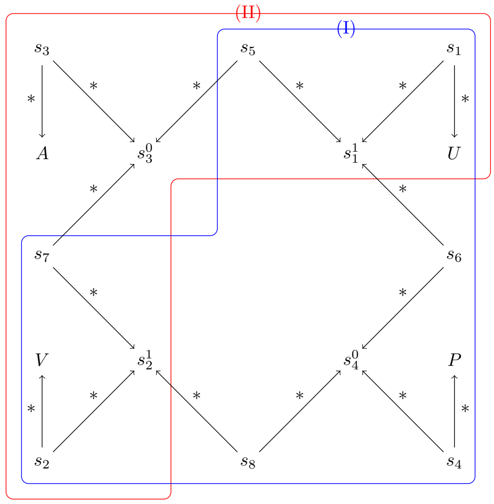

図 2　$\mathcal{R}$ が UNR でない $\Longrightarrow$ rPCP 問題は解がある証明方針

図 2 の書き換えでは，フラット右線形書き換え規則しか使えない．まず，図 2 全体を利用して，項 s_5, s_6, s_7 と s_8 の葉の位置にある定数が $\perp$ となることを示す．そして，図 2 の (I) の部分を利用して，項 s_5, s_6, s_7 と s_8 は同じインデックス $i_1 \cdots i_k$ を持つことを示す．最後に，(II) の部分を利用して，項 $s_3^0 = u_{i_1} \cdots u_{i_k} \perp = v_{i_1} \cdots v_{i_k} \perp$ を示すことで，rPCP 問題は解があることを導く．

3.3　誤った補題と反例

これから，文献 [2] の証明で用いられた誤った補題とその反例を挙げる．

誤った補題 3.1 ([2] の Lemma 9.)．項 s, t に対して，$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t$ なら，$\mathrm{clean}(s) \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} \mathrm{clean}(t)$ である．

ここの TRS $\mathcal{R}$ と関数 clean は文献 [2] に定義されたものである．

反例 3.2. $|u_1| = 1, |u_2| \geq 3$ となる rPCP 問題を考える．このとき，$U_{12}x \to x, U_{13}x \to x, U_{13}x \to U''_{13}x \in \mathcal{R}$．$s = U_{12}U_{13}U_{21}x, t = U''_{13}U_{21}x$ とすると，$\mathrm{clean}(s) = U_{21}x, \mathrm{clean}(t) = U''_{13}U_{21}x$ となる．このとき，$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t$ は成立するが，$\mathrm{clean}(s) \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} \mathrm{clean}(t)$ は成立しない．

文献 [2] では，この補題に基づいて,「一般性を失うことなく」$\mathrm{clean}(t) = t$ とし，証明を行っている．補

題の誤りにより，このような仮定を置かない精密な証明が必要となる．

誤った補題 3.3 ([2] の Lemma 11. の一部)**.** 項 $w\alpha$ と項 U，項 $w\alpha$ と項 A がそれぞれ交差するなら，$\alpha = \perp$ である．

反例 3.4. $|u_1| \geq 3$ となる rPCP 問題を考える．$U_{11}U_{12}U_{13}A \xrightarrow[\mathcal{R}_c]{*} U''_{11}U''_{12}U''_{13}A \xrightarrow[\mathcal{R}_A]{} U''_{11}U''_{12}U''_{13}\perp \xleftarrow[\mathcal{R}''_U]{*} U$ のため，項 $U_{11}U_{12}U_{13}A$ は項 U と交差する．同様に，$U_{11}U_{12}U_{13}A \xrightarrow[\mathcal{R}_s]{*} u_{11}u_{12}u_{13}A \xleftarrow[\mathcal{R}_A]{*} A$ のため，項 $U_{11}U_{12}U_{13}A$ は項 A と交差する．$w\alpha = U_{11}U_{12}U_{13}A$ ととると，$\alpha = A$ となり，$\alpha = \perp$ とならない．

誤った補題 3.3 より，図 2 において，項 s_5 の葉の位置にある定数が $\perp$ のみとなることが保証できなくなる．しかし，この性質は証明の鍵となる性質であり，この誤りは，証明の基本部分における変更なしには，正しい証明が得られないことを示唆している．

4 証明の修正に向けた取り組み

本節では，フラット右線形 TRS の UNR の決定不能性の証明に向けて，文献[2] の証明の修正に取り組む．

4.1 フラット右線形 TRS $\mathcal{R}$ の修正

以下では，UNR の決定不能性を証明するのに用いる TRS を与える．TRS $\mathcal{R}_f$ と TRS $\mathcal{R}_n$ 以外の TRS はアリティが 0 と 1 の関数記号のみを用いた書き換え規則となっている．項を書くとき，可読性のために関数記号のアリティが 1 の場合，括弧 ( ) を省略する．つまり，関数記号 $f:1$ とし，$f(t)$ を ft と略す．関数記号集合 $\mathcal{F}_A := \{\gamma : 1 \mid \gamma \in \Gamma\} \cup \{A : 0, \perp : 0\}$ を用いて，TRS $\mathcal{R}_A := \{A \to \gamma A, A \to \gamma\perp \mid \gamma \in \Gamma\}$ を作る．

rPCP 問題 $\{\langle u_1, v_1\rangle, \ldots, \langle u_n, v_n\rangle\}$ において，u_i, v_i $(1 \leq i \leq n)$ において，最長の文字列の長さを L とし，関数記号集合 $\mathcal{F}_U := \{U_{ij} : 1 \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq L\} \cup \{\perp : 0\}$，$\mathcal{F}_V := \{V_{ij} : 1 \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq L\} \cup \{\perp : 0\}$ を用いて，TRS $\mathcal{R}_{S_1} := \{U_{ij}x \to u_{ij}x \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq |u_i|\} \cup \{V_{ij}x \to v_{ij}x \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq |v_i|\}$ と $\mathcal{R}_{S_2} := \{U_{ij}x \to x \mid 1 \leq i \leq n, |u_i| < j \leq L\} \cup \{V_{ij}x \to x \mid 1 \leq i \leq n, |v_i| < j \leq L\}$ を作り，TRS $\mathcal{R}_{S_2}$ のような書き換え規則を崩壊規則とよぶ．

関数記号集合 $\mathcal{F}''_U := \{U''_{ij} : 1, U'_{ij} : 0 \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq L\} \cup \{U : 0, \perp : 0\}$，$\mathcal{F}''_V := \{V''_{ij} : 1, V'_{ij} : 0 \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq L\} \cup \{V : 0, \perp : 0\}$ と $\mathcal{F}_p := \{P_{ij} : 1, P'_{ij} : 0 \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq L\} \cup \{P : 0, \perp : 0\}$ を用いて，TRS $\mathcal{R}''_U := \{U \to U'_{i1},\ U'_{ij} \to U''_{ij}U'_{i(j+1)},\ U'_{iL} \to U''_{iL}U,\ U'_{iL} \to U''_{iL}\perp \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < L\}$，$\mathcal{R}''_V := \{V \to V'_{i1},\ V'_{ij} \to V''_{ij}V'_{i(j+1)},\ V'_{iL} \to V''_{iL}V,\ V'_{iL} \to V''_{iL}\perp \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < L\}$ と $\mathcal{R}_P := \{P \to P'_{i1},\ P'_{ij} \to P_{ij}P'_{i(j+1)},\ P'_{iL} \to P_{iL}P,\ P'_{iL} \to P_{iL}\perp \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < L\}$ を作る．

関数記号集合 $\mathcal{F}_U, \mathcal{F}''_U, \mathcal{F}''_V$ と $\mathcal{F}_P$ を用いて，TRS $\mathcal{R}_c := \{U_{ij}x \to U''_{ij}x,\ U_{ij}x \to P_{ij}x,\ V_{ij}x \to V''_{ij}x,\ V_{ij}x \to P_{ij}x \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq L\}$ を作る．

ここで，集合 $\mathcal{F}_{add} := \{f : 8, 0 : 0, 1 : 0\}$ と今まで定義した諸関数記号集合で，全体の関数記号集合を $\mathcal{F} := \mathcal{F}_A \cup \mathcal{F}_U \cup \mathcal{F}_V \cup \mathcal{F}''_U \cup \mathcal{F}''_V \cup \mathcal{F}_P \cup \mathcal{F}_{add}$ と定義する．

最後に，TRS $\mathcal{R}_f := \{f(U, V, x, y, x, y, x, y) \to 0,\ f(x, y, A, P, x, x, y, y) \to 1\}$ と $\mathcal{R}_n := \{c \to c \mid c \in \mathcal{F}_0 \setminus \{0, 1\}\} \cup \{h(x) \to h(x) \mid h \in \mathcal{F}_1\} \cup \{f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \to f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)\}$ を作る．

TRS $\mathcal{R} := \mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_{S_1} \cup \mathcal{R}_{S_2} \cup \mathcal{R}''_U \cup \mathcal{R}''_V \cup \mathcal{R}_P \cup \mathcal{R}_c \cup \mathcal{R}_f \cup \mathcal{R}_n$ とする．これで，証明に使う TRS $\mathcal{R}$ が作れた．$\mathcal{R}$ 内のすべての書き換え規則はフラットであり，$\mathcal{R}_f$ の書き換え規則を除いて他の規則は線形であり，$\mathcal{R}_f$ の書き換え規則は右線形のため，TRS $\mathcal{R}$ はフラット右線形である．

本稿で定義したフラット右線形 TRS $\mathcal{R}$ は，文献[2] のフラット右線形 TRS の定義と少し異なる．異なる点は $\mathcal{R}_A$ の定義である．文献[2] では，規則 $A \to \perp \in \mathcal{R}_A$ が定義されているが，本稿では，規則 $A \to \perp$ を削除し，代わりに，$A \to \gamma\perp$ $(\gamma \in \Gamma)$ を追加した．

以下の補題は $\mathcal{R}\backslash(\mathcal{R}_f \cup \mathcal{R}_n)$ に対して用いる．

補題 4.1. TRS $\mathcal{R}$ において，項 $s \in \mathrm{T}(\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1, \mathcal{V})$ とし，任意の書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ について，

(1) $l \in \mathcal{F}_0$，または，

(2) ある $f \in \mathcal{F}_1$ について，$l = f(x)$ かつ $x \in \mathrm{V}(r)$

とする．このとき，$s = C[\alpha] \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t, \alpha \in \mathcal{F}_0$ ならば，ある文脈 C'，項 t' に対して，$t = C'[t'], C[\ ] \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} C'[\ ], \alpha \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t'$ が成立する．

(証明)．書き換えステップの長さ $n = |s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t|$ に関する帰納法を使う．

B.C. $n = 0$ **の場合**

$t' = \alpha, C'[\ ] = C[\ ]$ ととればよいので，自明である．

I.S. $n > 0$ **の場合**

$C[\alpha] \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s' \xrightarrow[l \to r, p]{} t$ とおける．I.H. より，$\exists$ 文脈 D, 項 u について，$s' = D[u]_q, C[\ ] \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} D[\ ], \alpha \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} u$．位置 p と位置 q の位置関係によって場合分けする．

1. $p \geq q$ **の場合**

このとき，$s' = D[u]_q = D[D'[l\sigma]]_q \xrightarrow[l \to r, p]{} D[D'[r\sigma]]_q = t$. よって，$C'[\ ] = D[\ ], t' = D'[r\sigma]$ とすれば，$C[\ ] \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} D[\ ] = C'[\ ], \alpha \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} u = D'[l\sigma] \xrightarrow[l \to r]{} D'[r\sigma] = t'$ となり，題意が成立する．

2. $p < q$ **の場合**

このとき，$s' = D[u]_q = D'[f(D''[u])]_p \xrightarrow[l \to r, p]{} D'[C_r[D''[u]]]_p = t$（ここで，仮定より，$l = f(x), r = C_r[x]$ とおく）．よって，$C'[\ ] = D'[C_r[D''[\ ]]], t' = u$ とすれば，$C[\ ] \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} D[\ ] = D'[f(D''[\ ])] \xrightarrow[l \to r]{} D'[C_r[D''[\ ]]] = C'[\ ], \alpha \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} u = t'$ となり，題意が成立する．

3. $p \parallel q$ **の場合**

$t' = u, C'[\ ] = D[\ ]$ ととればよいので，自明である．

よって，題意が成立する．

$\square$

4.2 証明に使う諸定義

これから，フラット右線形 TRS の UNR の決定不能性の証明に使う概念と記法を定義する．

まず，以下のような 3 つの文脈を定義する．

定義 4.2. TRS $\mathcal{R}_{S_2}$ の崩壊規則に対応して，崩壊文脈 $\widehat{C}$ を次のように定義する：$\widehat{C}[\ ] := \Box \mid U_{ij}\widehat{C}[\ ] \mid V_{ij}\widehat{C}[\ ]$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq |u_i| < j \leq L)$.

定義 4.3. 崩壊文脈を包含する擬似崩壊文脈 $\widehat{{}^{q}C}$ を次のように定義する：$\widehat{{}^{q}C}[\ ] := \Box \mid U_{ij}\widehat{{}^{q}C}[\ ] \mid U''_{ij}\widehat{{}^{q}C}[\ ] \mid V_{ij}\widehat{{}^{q}C}[\ ] \mid V''_{ij}\widehat{{}^{q}C}[\ ] \mid P_{ij}\widehat{{}^{q}C}[\ ]$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq |u_i| < j \leq L)$.

崩壊文脈，擬似崩壊文脈において，定数 $\Box$ と異なるとき，非ホール崩壊文脈，非ホール擬似崩壊文脈とよぶ．

TRS $\mathcal{R}_A, \mathcal{R}''_U, \mathcal{R}''_V$ と $\mathcal{R}_P$ の書き換えに対応する項も用意し，その項を連続項と名付ける．$\overrightarrow{A}, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{U_{ij}}, \overrightarrow{U_{iL}}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{V_{ij}}, \overrightarrow{V_{iL}}, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{P_{ij}}, \overrightarrow{P_{iL}}$ は連続項の表記とし，次の定義で与えられる．

定義 4.4. 連続項 $\overrightarrow{A} := A \mid \gamma\bot \mid \gamma\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{U} := U \mid \overrightarrow{U_{i1}}$ $(1 \leq i \leq n)$, $\overrightarrow{U_{ij}} := U'_{ij} \mid U''_{ij}\overrightarrow{U_{i(j+1)}}$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j < L)$, $\overrightarrow{U_{iL}} := U'_{iL} \mid U''_{iL}\overrightarrow{U_{i'1}} \mid U''_{iL}\bot$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq i' \leq n)$. 連続項 $\overrightarrow{V}, \overrightarrow{P}$，連続項 $\overrightarrow{V_{ij}}, \overrightarrow{P_{ij}}$ と連続項 $\overrightarrow{V_{iL}}, \overrightarrow{P_{iL}}$ について，それぞれ $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{U_{ij}}$ と $\overrightarrow{U_{iL}}$ と同様に定義できる．

項を木構造で表すことができる．証明では，項を木で表す際に，葉の位置にどんな定数を持つかを表すため，次の leaf 関数を定義する．

定義 4.5. $\mathrm{leaf}(t)$ は項 t $(\in \mathrm{T}(\mathcal{F}))$ を木で表す際の葉の位置にある定数の集合である．

$$\mathrm{leaf(t)} = \begin{cases} \{t\} & (t \in \Sigma_0) \\ \bigcup_{1 \leq i \leq ar(\mathrm{root}(t))} \mathrm{leaf}(t|_i) & (t \notin \Sigma_0) \end{cases}$$

$\mathrm{root}(t) \notin \mathcal{V} \cup \mathcal{F}_0$ に満たすような項 t に対して，$(\mathrm{parent} \circ \mathrm{leaf})(t)$ は，項 t の葉の位置にある定数の親ノードの位置にある関数記号の集合を表し，$(\mathrm{parent} \circ \mathrm{leaf})(t) \subseteq \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{F}_i$ である．

rPCP 問題の解を求めるために，次の indexes 関数が必要である．

定義 4.6 ([2]). indexes 関数は高々アリティが 1 の関数記号からなる項に対して，正整数の列を与える

関数である．項 t $(\in \mathrm{T}(\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1))$ に対して，indexes 関数を以下のように定義する．indexes$(t) =$

$$\begin{cases} \epsilon & (t \in \mathcal{F}_0 \text{の時}) \\ i.\mathrm{indexes}(t|_1) & \\ \quad (\mathrm{root}(t) \in \{U_{i1}, U''_{i1}, V_{i1}, V''_{i1}, P_{i1}\} \text{ の時}) & \\ \mathrm{indexes}(t|_1) & \\ \quad (\mathrm{root}(t) \notin \{U_{i1}, U''_{i1}, V_{i1}, V''_{i1}, P_{i1}\} \text{ の時}) & \end{cases}$$

本稿では，同一種類の添字付き関数記号集合を $(S_{ij})_{ij}$ $(S \in \{U, V, P, U', V', P', U'', V''\})$ で表す．例えば，$(U''_{ij})_{ij} = \{U''_{ij} : 1 \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq L\}$ である．項 t の中に同じ関数記号集合 $(S_{ij})_{ij}$ に属する関数記号の個数を表すものを $\|t\|_S$ と書く．例えば，$t = U''_{11}U''_{12}U'_{31}$ の場合，$\|t\|_{U''} = 2, \|t\|_{U'} = 1$ である．

4.3 UNR の決定不能の証明

補題 4.7. $s \xrightarrow[l \to r \in \mathcal{R}]{} s'$ とし，ある崩壊文脈 $\widehat{C}$ について，$s' = \widehat{C}[U]$ と仮定する．このとき，ある崩壊文脈 $\widehat{C_1}$ に対して，$s = \widehat{C_1}[U]$ かつ $l \to r \in \mathcal{R}_{S_2} \cup \mathcal{R}_n$ である．

(証明)．$l \to r \in \mathcal{R}$ により場合分けする．

1. $l \to r \in \mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_{S_1} \cup \mathcal{R}''_U \cup \mathcal{R}''_V \cup \mathcal{R}_P \cup \mathcal{R}_c \cup \mathcal{R}_f$ とすると，$s' = \widehat{C}[U]$ はありえない．仮定と矛盾するため，題意が成立する．
2. $l \to r \in \mathcal{R}_{S_2}$ の場合，$s' = \widehat{C}[U]$ とすると，$\widehat{C}[\ ] = \widehat{C_2}[\widehat{C_3}[\ ]]$ となる $\widehat{C_2}, \widehat{C_3}$ に対して，$s = \widehat{C_2}[U_{ij}\widehat{C_3}[U]]$ $(|u_i| < j \leq L)$，または，$s = \widehat{C_2}[V_{ij}\widehat{C_3}[U]]$ $(|v_i| < j \leq L)$ となる．よって，題意が成立する．
3. $l \to r \in \mathcal{R}_n$ の場合，$s' = \widehat{C}[U]$ とすると，$s = \widehat{C}[U]$ である．よって，題意が成立する．

□

補題 4.8. $s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} U$ と仮定する．このとき，$s = \widehat{C}[U]$ を満たすような崩壊文脈 $\widehat{C}$ が存在する．

(証明)．書き換えステップの長さ $n = |s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} U|$ に関する帰納法を使う．

B.C. $n = 0$ **の場合**

$s = U$ であり，題意が成立する．

I.S. $n > 0$ **の場合**

$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{} s' \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} U \implies \exists \widehat{C}.\ s = \widehat{C}[U]$ を示す．
I.H. は，$s' \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} U \implies \exists \widehat{C}_1 . s' = \widehat{C}_1[U]$ である．
$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{} s'$ について，I.H. と補題 4.7 より，$s = \widehat{C}[U]$ である．よって，題意が成立する．

□

補題 4.9. 擬似崩壊文脈 $\widehat{{}^{q}C}$ と連続項 $\overrightarrow{U}$ について，$t = \widehat{{}^{q}C}[\overrightarrow{U}] \xrightarrow[\mathcal{R}]{} s$ と仮定する．このとき，$s = \widehat{{}^{q}C'}[\overrightarrow{U'}]$ を満たすような擬似崩壊文脈 $\widehat{{}^{q}C'}$ と連続項 $\overrightarrow{U'}$ が存在する．

(証明)．$t \xrightarrow[l \to r]{} s$ とし，$l \to r \in \mathcal{R}$ により場合分けする．

1. $l \to r \in \mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_{S_1} \cup \mathcal{R}''_V \cup \mathcal{R}_P \cup \mathcal{R}_f$ のとき，$\widehat{{}^{q}C}[\overrightarrow{U}]$ のような項に書き換え規則を適用できない．仮定と矛盾するため，題意が成立する．
2. $l \to r \in \mathcal{R}_{S_2} \cup \mathcal{R}_c$ のとき，$\exists \widehat{{}^{q}C'}.\ s = \widehat{{}^{q}C'}[\overrightarrow{U}]$ のため，題意が成立する．
3. $l \to r \in \mathcal{R}''_U$ のとき，$\exists \overrightarrow{U'}.\ s = \widehat{{}^{q}C}[\overrightarrow{U'}]$ であるため，題意が成立する．
4. $l \to r \in \mathcal{R}_n$ のとき，$s = \widehat{{}^{q}C}[\overrightarrow{U}]$ のため，題意が成立する．

□

補題 4.10. $t = \widehat{{}^{q}C}[\overrightarrow{U}] \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s$ と仮定する．このとき，$s = \widehat{{}^{q}C'}[\overrightarrow{U'}]$ を満たすような擬似崩壊文脈 $\widehat{{}^{q}C'}$ と連続項 $\overrightarrow{U'}$ が存在する．

(証明)．書き換えステップの長さ $n = |t \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s|$ に関する帰納法を使う．

B.C. $n = 0$ **の場合**

$s = \widehat{{}^{q}C}[\overrightarrow{U}]$ のため，題意が成立する．

I.S. $n > 0$ **の場合**

$\widehat{{}^{q}C}[\overrightarrow{U}] \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s' \xrightarrow[\mathcal{R}]{} s \implies \exists \widehat{{}^{q}C'}.\ \exists \overrightarrow{U'}.\ s = \widehat{{}^{q}C'}[\overrightarrow{U'}]$ を示す．
I.H. より，$\exists \widehat{{}^{q}C''}.\ \exists \overrightarrow{U''}.\ s' = \widehat{{}^{q}C''}[\overrightarrow{U''}]$．$s' \xrightarrow[\mathcal{R}]{} s$ について，補題 4.9 より，$\exists \widehat{{}^{q}C'}.\ \exists \overrightarrow{U'}.\ s = \widehat{{}^{q}C'}[\overrightarrow{U'}]$

である．よって，題意が成立する．

□

補題 4.11. $s \xrightarrow[l\to r\in\mathcal{R}]{} s'$ とし，ある崩壊文脈 $\widehat{C}$ について，$s' = \widehat{C}[A]$ と仮定する．このとき，ある崩壊文脈 $\widehat{C_1}$ に対して，$s = \widehat{C_1}[A]$ かつ $l \to r \in \mathcal{R}_{S_2} \cup \mathcal{R}_n$ である．

(証明)．$l \to r \in \mathcal{R}$ により場合分けする．

1. $l \to r \in \mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_{S_1} \cup \mathcal{R}''_U \cup \mathcal{R}''_V \cup \mathcal{R}_P \cup \mathcal{R}_c \cup \mathcal{R}_f$ とすると，$s' = \widehat{C}[A]$ はありえない．仮定と矛盾するため，題意が成立する．
2. $l \to r \in \mathcal{R}_{S_2}$ の場合，$s' = \widehat{C}[A]$ とすると，$\widehat{C}[\ ] = \widehat{C_2}[\widehat{C_3}[\ ]]$ となる $\widehat{C_2}, \widehat{C_3}$ に対して，$s = \widehat{C_2}[U_{ij}\widehat{C_3}[A]]$ $(|u_i| < j \leq L)$，または，$s = \widehat{C_2}[V_{ij}\widehat{C_3}[A]]$ $(|v_i| < j \leq L)$ となる．よって，題意が成立する．
3. $l \to r \in \mathcal{R}_n$ の場合，$s' = \widehat{C}[A]$ とすると，$s = \widehat{C}[A]$ である．よって，題意が成立する．

□

補題 4.12. $s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} A$ と仮定する．このとき，$s = \widehat{C}[A]$ を満たすような崩壊文脈 $\widehat{C}$ が存在する．

(証明)．書き換えステップの長さ $n = |s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} A|$ に関する帰納法を使う．

B.C. $n = 0$ **の場合**

$s = A$ であり，題意が成立する．

I.S. $n > 0$ **の場合**

$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{} s' \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} A \implies \exists \widehat{C}.\ s = \widehat{C}[A]$ を示す．
I.H. は，$s' \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} A \implies \exists \widehat{C_1}.\ s' = \widehat{C_1}[A]$ である．$s \xrightarrow[\mathcal{R}]{} s'$ について，補題 4.11 より，$s = \widehat{C}[A]$ である．よって，題意が成立する．

□

補題 4.13. 擬似崩壊文脈 $\widehat{{}^q C}$ と連続項 $\overrightarrow{A}$ について，$t = \widehat{{}^q C}[\overrightarrow{A}] \xrightarrow[\mathcal{R}]{} s$ と仮定する．このとき，$s = \widehat{{}^q C'}[\overrightarrow{A'}]$ を満たすような擬似崩壊文脈 $\widehat{{}^q C'}$ と連続項 $\overrightarrow{A'}$ が存在する．

(証明)．$t \xrightarrow[l\to r]{} s$ とし，$l \to r \in \mathcal{R}$ により場合分けする．

1. $l \to r \in \mathcal{R}_{S_1} \cup \mathcal{R}''_U \cup \mathcal{R}''_V \cup \mathcal{R}_P \cup \mathcal{R}_f$ のとき，書き換え規則を適用できないため，題意が成立する．
2. $l \to r \in \mathcal{R}_{S_2} \cup \mathcal{R}_c$ のとき，$\exists \widehat{{}^q C'}.\ s = \widehat{{}^q C'}[\overrightarrow{A}]$ のため，題意が成立する．
3. $l \to r \in \mathcal{R}_n$ のとき，$s = t = \widehat{{}^q C}[\overrightarrow{A}]$ のため，題意が成立する．
4. $l \to r \in \mathcal{R}_A$ のとき，$\exists \overrightarrow{A'}.\ s = \widehat{{}^q C}[\overrightarrow{A'}]$ であるため，題意が成立する．

□

補題 4.14. 擬似崩壊文脈 $\widehat{{}^q C}$ と連続項 $\overrightarrow{A}$ について，$t = \widehat{{}^q C}[\overrightarrow{A}] \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s$ と仮定する．このとき，$s = \widehat{{}^q C'}[\overrightarrow{A'}]$ を満たすような擬似崩壊文脈 $\widehat{{}^q C'}$ と連続項 $\overrightarrow{A'}$ が存在する．

(証明)．書き換えステップの長さ $n = |t \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s|$ に関する帰納法を使う．

B.C. $n = 0$ **の場合**

$s = \widehat{{}^q C}[\overrightarrow{A}]$ のため，題意が成立する．

I.S. $n > 0$ **の場合**

$\widehat{{}^q C}[\overrightarrow{A}] \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s' \xrightarrow[\mathcal{R}]{} s \implies \exists \widehat{{}^q C'}.\ \exists \overrightarrow{A'}.\ s = \widehat{{}^q C'}[\overrightarrow{A'}]$ を示す．
I.H. より，$\exists \widehat{{}^q C''}.\ \exists \overrightarrow{A''}.\ s' = \widehat{{}^q C''}[\overrightarrow{A''}]$．$s' \xrightarrow[\mathcal{R}]{} s$ について，補題 4.13 より，$\exists \widehat{{}^q C'}.\ \exists \overrightarrow{A'}.\ s = \widehat{{}^q C'}[\overrightarrow{A'}]$ である．よって，題意が成立する．

□

補題 4.15. 連続項 $\overrightarrow{A}$ について，$\mathrm{leaf}(\overrightarrow{A}) = \{A\}$ または $\mathrm{leaf}(\overrightarrow{A}) = \{\bot\}$ である．$A \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s$ ならばある連続項 $\overrightarrow{A}$ について，$s = \overrightarrow{A}$．また，$s \neq A$ ならば $\emptyset \neq (\mathrm{parent} \circ \mathrm{leaf})(s) \subseteq \Gamma$.

(証明)．TRS $\mathcal{R}$，関数 leaf，関数 $(\mathrm{parent} \circ \mathrm{leaf})$ と連続項 $\overrightarrow{A}$ の定義より，自明である． □

補題 4.16. 連続項 $\overrightarrow{U}$ について，$\mathrm{leaf}(\overrightarrow{U}) = \{U\}$ または $\mathrm{leaf}(\overrightarrow{U}) \subseteq (U'_{ij})_{ij}$ または $\mathrm{leaf}(\overrightarrow{U}) = \{\bot\}$ である．$U \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s$ ならばある連続項 $\overrightarrow{U}$ について $s = \overrightarrow{U}$ で，$U'_{ij} \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s$ ならばある連続項 $\overrightarrow{U_{ij}}$ について $s = \overrightarrow{U_{ij}}$．また，$\bot \in \mathrm{leaf}(s)$ ならば $\emptyset \neq (\mathrm{parent} \circ \mathrm{leaf})(s) \subseteq$

$(U''_{iL})_i$.

(証明). TRS $\mathcal{R}$，関数 leaf，関数 (parent $\circ$ leaf) と連続項 $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{U_{ij}}$ の定義より，自明である． $\square$

補題 4.17. 連続項 $\overrightarrow{V}$ について，$\mathrm{leaf}(\overrightarrow{V}) = \{V\}$ または $\mathrm{leaf}(\overrightarrow{V}) \subseteq (V'_{ij})_{ij}$ または $\mathrm{leaf}(\overrightarrow{V}) = \{\perp\}$ である．$V \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s$ ならばある連続項 $\overrightarrow{V}$ について $s = \overrightarrow{V}$ で，$V'_{ij} \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s$ ならばある連続項 $\overrightarrow{V_{ij}}$ について $s = \overrightarrow{V_{ij}}$．また，$\perp \in \mathrm{leaf}(s)$ ならば $\emptyset \neq (\mathrm{parent} \circ \mathrm{leaf})(s) \subseteq (V''_{iL})_i$.

(証明). TRS $\mathcal{R}$，関数 leaf，関数 (parent $\circ$ leaf) と連続項 $\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V_{ij}}$ の定義より，自明である． $\square$

補題 4.18. 連続項 $\overrightarrow{P}$ について，$\mathrm{leaf}(\overrightarrow{P}) = \{P\}$ または $\mathrm{leaf}(\overrightarrow{P}) \subseteq (P'_{ij})_{ij}$ または $\mathrm{leaf}(\overrightarrow{P}) = \{\perp\}$ である．$P \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s$ ならばある連続項 $\overrightarrow{P}$ について $s = \overrightarrow{P}$ で，$P'_{ij} \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s$ ならばある連続項 $\overrightarrow{P_{ij}}$ について $s = \overrightarrow{P_{ij}}$．また，$\perp \in \mathrm{leaf}(s)$ ならば $\emptyset \neq (\mathrm{parent} \circ \mathrm{leaf})(s) \subseteq (P_{iL})_i$.

(証明). TRS $\mathcal{R}$，関数 leaf，関数 (parent $\circ$ leaf) と連続項 $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{P_{ij}}$ の定義より，自明である． $\square$

補題 4.19. $t \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s$ のとき，以下が成立する．

1. $\mathrm{leaf}(t) = \{A\}, \mathrm{leaf}(s) = \{\perp\}$ とする．このとき，$\emptyset \neq (\mathrm{parent} \circ \mathrm{leaf})(s) \subseteq \Gamma$.
2. $\mathrm{leaf}(t) = \{X\}$ $(X \in \{U\} \cup (U'_{ij})_{ij}), \mathrm{leaf}(s) = \{\perp\}$ とする．このとき，$\emptyset \neq (\mathrm{parent} \circ \mathrm{leaf})(s) \subseteq (U''_{iL})_i$.
3. $\mathrm{leaf}(t) = \{X\}$ $(X \in \{V\} \cup (V'_{ij})_{ij}), \mathrm{leaf}(s) = \{\perp\}$ とする．このとき，$\emptyset \neq (\mathrm{parent} \circ \mathrm{leaf})(s) \subseteq (V''_{iL})_i$.
4. $\mathrm{leaf}(t) = \{X\}$ $(X \in \{P\} \cup (P'_{ij})_{ij}), \mathrm{leaf}(s) = \{\perp\}$ とする．このとき，$\emptyset \neq (\mathrm{parent} \circ \mathrm{leaf})(s) \subseteq (P_{iL})_i$.

(証明).

1. $\mathrm{leaf}(t) \neq \mathrm{leaf}(s)$ より，$t \xrightarrow[\mathcal{R}]{+} s$．このとき，補題 4.1 より，ある文脈 C' と連続項 $\overrightarrow{A}$ に対して，$t = C[A], s = C'[\overrightarrow{A}], A \xrightarrow[\mathcal{R}]{+} \overrightarrow{A}$．補題 4.15 より，題意が成立する．
2. $\mathrm{leaf}(t) \neq \mathrm{leaf}(s)$ より，$t \xrightarrow[\mathcal{R}]{+} s$．$t = C[U]$ と $t = C[U'_{ij}]$ に場合分けする．$t = C[U]$ のとき，補題 4.1 より，ある文脈 C' と連続項 $\overrightarrow{U}$ に対して，$t = C[U], s = C'[\overrightarrow{U}], U \xrightarrow[\mathcal{R}]{+} \overrightarrow{U}$．補題 4.16 より，題意が成立する．$t = C[U'_{ij}]$ のとき，補題 4.1 より，ある文脈 C' と連続項 $\overrightarrow{U_{ij}}$ に対して，$t = C[U'_{ij}], s = C'[\overrightarrow{U_{ij}}], U'_{ij} \xrightarrow[\mathcal{R}]{+} \overrightarrow{U_{ij}}$．補題 4.16 より，題意が成立する．

3 と 4 の証明は，それぞれ補題 4.17 と補題 4.18 を用いて，2 の方針と同様にして証明できる． $\square$

補題 4.20. $s \xrightarrow[l \to r \in \mathcal{R}]{} t$ とする．このとき，以下が成立する．

1. $\mathrm{leaf}(t) = \{A\}$ ならば，$\mathrm{leaf}(s) = \{A\}$.
2. $\mathrm{leaf}(t) \subseteq \{U\} \cup (U'_{ij})_{ij}$ ならば，$\mathrm{leaf}(s) \subseteq \{U\} \cup (U'_{ij})_{ij}$.
3. $\mathrm{leaf}(t) \subseteq \{V\} \cup (V'_{ij})_{ij}$ ならば，$\mathrm{leaf}(s) \subseteq \{V\} \cup (V'_{ij})_{ij}$.
4. $\mathrm{leaf}(t) \subseteq \{P\} \cup (P'_{ij})_{ij}$ ならば，$\mathrm{leaf}(s) \subseteq \{P\} \cup (P'_{ij})_{ij}$.
5. $\mathrm{leaf}(t) = \{\perp\}$ ならば，$\mathrm{leaf}(s) \subseteq \{A, \perp\} \cup (U'_{iL})_i \cup (V'_{iL})_i \cup (P'_{iL})_i$.

(証明). TRS $\mathcal{R}$ において，条件を満たすために適用できる書き換え規則より，題意が成立することは明らか． $\square$

補題 4.21. $s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t$ とする．このとき，以下が成立する．

1. $\mathrm{leaf}(t) = \{A\}$ ならば，$\mathrm{leaf}(s) = \{A\}$
2. $\mathrm{leaf}(t) \subseteq \{U\} \cup (U'_{ij})_{ij}$ ならば，$\mathrm{leaf}(s) \subseteq \{U\} \cup (U'_{ij})_{ij}$
3. $\mathrm{leaf}(t) \subseteq \{V\} \cup (V'_{ij})_{ij}$ ならば，$\mathrm{leaf}(s) \subseteq \{V\} \cup (V'_{ij})_{ij}$
4. $\mathrm{leaf}(t) \subseteq \{P\} \cup (P'_{ij})_{ij}$ ならば，$\mathrm{leaf}(s) \subseteq \{P\} \cup (P'_{ij})_{ij}$
5. $\mathrm{leaf}(t) = \{\perp\}$ ならば, $\mathrm{leaf}(s) \subseteq \{A, \perp, U, V, P\} \cup (U'_{ij})_{ij} \cup (V'_{ij})_{ij} \cup (P'_{ij})_{ij}$

(証明). 1 から 4 の証明については，補題 4.20 の 1 から 4 を用いて，書き換えステップの長さ $|s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t|$ に関する帰納法を使うことより証明できる．

5 の証明については，本補題の 1 から 4 を用いて，

$$
\begin{tikzcd}
s_3 \arrow[d, "*"'] \arrow[dr, "*"] & & s_5 \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & & s_1 \arrow[dl, "*"'] \arrow[d, "*"] \\
A & s_3^0 & & s_1^1 & U
\end{tikzcd}
$$

図 3　s_5 に関する書き換え図

書き換えステップの長さ $|s \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} t|$ に関する帰納法を使うことより証明できる．　□

これから，図 3 に示す書き換えの状況があるときに，$\mathrm{leaf}(s_5) = \{\bot\}$ であることを証明する．

定理 4.22. $A \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} s_3 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s_3^0 \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} s_5, s_5 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s_1^1 \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} s_1 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} U$ のとき，$\mathrm{leaf}(s_5) = \{\bot\}$ である．

(証明)．証明に入る前に，証明の全体の流れを述べる．まず，項 s_3, s_1 の形を求める．その後，項 s_3, s_1 の形と仮定の書き換えが成立することより，$\mathrm{leaf}(s_3^0) = \{\bot\}$ を示す．最後に，これを用いて $\mathrm{leaf}(s_5) = \{\bot\}$ を示す．

ここで，もう 1 つ注意を述べる．容易に確認できるように，図 3 の書き換えにおいて，$\mathcal{R}_f$ の規則および $\mathcal{R}_n$ の $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) \to f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8)$ の規則を用いることはできない．従って，項 $s_3, s_3^0, s_5, s_1^1, s_1 \in \mathrm{T}(\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1, \mathcal{V})$ であり，$|\mathrm{leaf}(t)| = 1$ $(t \in \{s_3, s_3^0, s_5, s_1^1, s_1\})$ である．

補題 4.12 より，ある崩壊文脈 $\widehat{C}$ に対して，$s_3 = \widehat{C}[A]$ である．$s_3 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s_3^0$ と補題 4.14 より，ある擬似崩壊文脈 $\widehat{{}^{q}C}$ と連続項 $\overrightarrow{A}$ に対して，$s_3^0 = \widehat{{}^{q}C}[\overrightarrow{A}]$ である．同様に，補題 4.8 より，ある崩壊文脈 $\widehat{C'}$ に対して，$s_1 = \widehat{C'}[U]$ である．$s_1 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s_1^1$ と補題 4.10 より，ある擬似崩壊文脈 $\widehat{{}^{q}C'}$ と連続項 $\overrightarrow{U}$ に対して，$s_1^1 = \widehat{{}^{q}C'}[\overrightarrow{U}]$ である．

補題 4.15 より，$\mathrm{leaf}(s_3^0) = \{A\}$ または $\mathrm{leaf}(s_3^0) = \{\bot\}$ である．今，$\mathrm{leaf}(s_3^0) = \{A\}$ を仮定する．補題 4.21 の 1 より，$\mathrm{leaf}(s_5) = \{A\}$ である．一方，$s_5 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s_1^1 = \widehat{{}^{q}C'}[\overrightarrow{U}]$ から，補題 4.21 の 2 より，$\mathrm{leaf}(s_1^1) \subseteq \{U\} \cup (U'_{ij})_{ij}$ であれば，$\mathrm{leaf}(s_5) \subseteq \{U\} \cup (U'_{ij})_{ij}$ となり，$\mathrm{leaf}(s_5) = \{A\}$ と矛盾する．従って，補題 4.16 より，$\mathrm{leaf}(s_1^1) = \{\bot\}$．ここで，補題 4.19 の 2 より，$\emptyset \neq (\mathrm{parent} \circ \mathrm{leaf})(s_1^1) \subseteq (U''_{iL})_i$．また，補題 4.19 の 1 より，$\emptyset \neq (\mathrm{parent} \circ \mathrm{leaf})(s_1^1) \subseteq \Gamma$．これは $(U''_{iL})_i \cap \Gamma = \emptyset$ と矛盾する．以上より，$\mathrm{leaf}(s_3^0) = \{\bot\}$ が導かれた．

補題 4.21 の 5 より，$\mathrm{leaf}(s_5) \subseteq \{A, \bot, U, V, P\} \cup (U'_{ij})_{ij} \cup (V'_{ij})_{ij} \cup (P'_{ij})_{ij}$ である．$|\mathrm{leaf}(s_5)| = 1$ のため，以下のように場合分けしてもよい．

1. $\mathrm{leaf}(s_5) = \{A\}$ のとき．
   上記で示したように，$\mathrm{leaf}(s_5) = \{A\}$ と仮定すると，$s_5 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s_1^1$ に矛盾するため，このような場合はない．
2. $\mathrm{leaf}(s_5) = \{U\}$ のとき．
   $s_5 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s_3^0$ について，補題 4.19 の 2 より，$\emptyset \neq (\mathrm{parent} \circ \mathrm{leaf})(s_3^0) \subseteq (U''_{iL})_i$．また，$s_3 = \widehat{C}[A] \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s_3^0$ について，補題 4.19 の 1 より，$\emptyset \neq (\mathrm{parent} \circ \mathrm{leaf})(s_3^0) \subseteq \Gamma$．これは，$(U''_{iL})_i \cap \Gamma = \emptyset$ と矛盾する．
3. $\mathrm{leaf}(s_5) \subseteq (U'_{ij})_{ij}$ のとき．
   $\mathrm{leaf}(s_5) = \{U\}$ のときと同じ理由で，矛盾が導かれる．
4. $\mathrm{leaf}(s_5) = \{V\}$ または $\mathrm{leaf}(s_5) = \{P\}$ のとき．
   $\mathrm{leaf}(s_5) = \{U\}$ のときと同じように，矛盾が導かれる．
5. $\mathrm{leaf}(s_5) \subseteq (V'_{ij})_{ij}$ または $\mathrm{leaf}(s_5) \subseteq (P'_{ij})_{ij}$ のとき．
   $\mathrm{leaf}(s_5) \subseteq (U'_{ij})_{ij}$ のときと同じように，矛盾が導かれる．

従って，最終的に $\mathrm{leaf}(s_5) = \{\bot\}$ の可能性しかない．　□

定理 4.22 で，誤った補題 3.3 が修正された．また，今まで証明した諸補題と定理 4.22 の方針と同様にして，$U \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} s_1 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s_1^1 \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} s_6 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s_4^0 \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} s_4 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} P$ に対して，$\mathrm{leaf}(s_6) = \{\bot\}$，$V \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} s_2 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s_2^1 \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} s_7 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s_3^0 \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} s_3 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} A$ に対して，$\mathrm{leaf}(s_7) = \{\bot\}$ と $V \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} s_2 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s_2^1 \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} s_8 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} s_4^0 \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} s_4 \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} P$ に対して，$\mathrm{leaf}(s_8) = \{\bot\}$ であることを証明できる．

さらに，文献[2] の証明方針に従って，本稿で定義したフラット右線形 TRS $\mathcal{R}$ において，「TRS $\mathcal{R}$ が UNR を持たないこと $\Longrightarrow$ rPCP 問題は解があること」を示せることが予想される．また，文献[2] の

「rPCP 問題は解があること $\Longrightarrow$ TRS $\mathcal{R}$ が UNR を持たないこと」の証明は，本稿で定義したフラット右線形 TRS $\mathcal{R}$ にとっても成立するため，フラット右線形 TRS の UNR の決定不能性が示せると考えられる．

5 まとめと今後の課題

本稿では，文献[2] の証明方針に従い，より詳細な解析を行うことと新しいフラット右線形 TRS $\mathcal{R}$ を定義することより，フラット右線形 TRS $\mathcal{R}$ において，「TRS $\mathcal{R}$ が UNR を持たないこと $\Longrightarrow$ rPCP 問題は解があること」の証明について，図 2 の状況が成立するときに，項 s_5, s_6, s_7 と s_8 の葉の位置にある定数が $\perp$ であることを示した．文献[2] の証明の方針に従って,「TRS $\mathcal{R}$ が UNR を持たないこと $\Longrightarrow$ rPCP 問題は解があること」の証明を完成するには，項 s_5, s_6, s_7 と s_8 は同じインデックス $i_1 \cdots 1_k$ であることの証明と項 $s_3^0 = u_{i_1} \cdots u_{i_k} \perp = v_{i_1} \cdots v_{i_k} \perp$ であることの証明が必要である．今後の課題は，これらを証明して，正しい証明を完成させることである．

謝辞 多くの助言や示唆を頂いた研究室の方々に感謝する．

参 考 文 献

[1] Baader, F. and Nipkow, T.: *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, (1998).

[2] Godoy, G. and Jacquemard, F.: Unique Normalization for Shallow TRS, *Proceedings of the 20th International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA 2009), LNCS*, Vol. 5595, Springer-Verlag, (2009), pp. 63–77.

[3] Sipser, M.: 計算理論の基礎, 共立出版, (2008).

[4] 佐藤悠稀, 青戸等人: フラット項書き換えシステムにおける正規形の一意性に関する性質の決定不能性, 情報処理学会論文誌プログラミング（*PRO*）, Vol. 14, No. 2(2021), pp. 15–24.