項書き換えシステムの合流性自動判定

吉田 順一　青戸 等人　外山 芳人

本論文では，複数の判定方法を組み合わせた項書き換えシステムの合流性自動判定システムを提案する．我々の提案するシステムでは，判定条件が直接適用できない複雑な項書き換えシステムに対して，直和分解や可換分解といった分解法を適用し，分解により得られた部分システムに対して合流性判定法を適用することによって，全体の合流性を自動判定する．このような合流性自動判定システムは，従来ほとんど知られていない．合流性自動判定システムを実装し，実験を行なった結果，従来の合流性判定条件が直接適用出来ない項書き換えシステムに対しても，合流性の自動判定に成功した．また，項書き換えシステムの合流性を扱った論文等から抜粋した例題集を構成し，合流性判定実験を試みる．

We propose an automated confluence checker for term rewriting systems (TRSs) that combines several criteria for proving the confluence property of TRSs. For a TRS to which none of confluence criteria directly applies, our checker automatically decomposes it into small components using direct sum decomposition and commutative decomposition, and applies the confluence criteria to each component so that the confluence of the whole system is checked by combining these results. For the best of our knowledge, an automated confluence checker based on such an approach has been unknown. We have implemented our checker, and have successfully applied our checker to automatically check the confluence of a complex TRS, to which none of known confluence criteria applies directly. We also construct a collection of sample TRSs mainly extracted from papers on confluence of TRSs and perform an experiment to this collection.

1 はじめに

停止性と合流性は項書き換えシステム[2][5]の重要な性質であり，さまざまな判定法が提案されている．停止性については，依存対解析に基づいた強力な停止性自動判定システムがすでに開発されている[6][16]．一方，合流性については，定理自動証明などで広く利用されているにもかかわらず，依存対解析のような強力な判定方法は知られていない．また，提案されているさまざまな判定方法[7][8][9][10][11][12][14][17][19][23][24][26][27][29][30][31][32][33]も適用範囲が限られているため，強力な合流性自動判定システムの開発は困難であった．

本研究では，複数の判定方法を組み合わせた合流性自動判定システムを提案する．我々の提案するシステムでは，判定条件が直接適用できない複雑な項書き換えシステムを自動分解し，分解された部分システムに対して適切な合流性判定条件を適用することによって，全体の合流性を自動判定する．したがって，本システムでは，これまで判定困難であった広いクラスの項書き換えシステムの合流性自動判定が可能である．

本論文は全 7 章で構成される．第 2 章では項書き換えシステムの基本的な概念について説明する．第 3 章では合流性基本判定条件を用いた合流性の自動判定について説明する．第 4 章では直和性，第 5 章では可換性を用いた項書き換えシステムの自動分解について説明する．第 6 章で，項書き換えシステムの自動分解と合流性の自動判定を組み合わせた合流性自動判定システムの手続きを示し，合流性自動判定の

Automating Confluence Check of Term Rewriting Systems.

Junichi Yoshida, Takahito Aoto, Yoshihito Toyama, 東北大学電気通信研究所, RIEC, Tohoku University.

コンピュータソフトウェア, Vol.16, No.5 (1999), pp.
[通常論文] xxxx 年 yy 月 zz 日受付.

実験結果を報告する．第 7 章では本研究のまとめと今後の課題について検討する．

2 項書き換えシステム

項書き換えシステムは書き換え規則の有限集合である[2] [5]．自然数 $0, 1, 2, \ldots$ を $0, S(0), S(S(0)), \ldots$ と表現すると，自然数上での加算は以下の項書き換えシステム R で与えられる．

$$R = \begin{cases} x + 0 & \rightarrow \quad x \\ x + S(y) & \rightarrow \quad S(x + y) \end{cases}$$

たとえば，$1+1 = 2$ の計算は，R では $S(0)+S(0) \rightarrow S(S(0) + 0) \rightarrow S(S(0))$ なる書き換えで実現できる．このとき，項 $S(S(0))$ のようにこれ以上書き換えできない項を正規形という．

項 M から N に 0 回以上の書き換えで到達できるとき $M \xrightarrow{*} N$ と記す．任意の項 M, N_1, N_2 について，$N_1 \xleftarrow{*} M \xrightarrow{*} N_2$ ならばある項 M' が存在して $N_1 \xrightarrow{*} M' \xleftarrow{*} N_2$ となるとき，項書き換えシステム R は合流性 (Church-Rosser 性) をもつといい $CR(R)$ と記す．無限列 $M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \cdots$ が存在しないならば，R は停止性をもつという．どの変数も 1 回しか現れない項を線形であるという．すべての書き換え規則の左辺が線形ならば R は左線形であるという．

危険対[2] [5] は，項書き換えシステムの合流性判定に重要である．たとえば，次の項書き換えシステム R を考える．

$$R = \begin{cases} F(x) & \rightarrow \quad I(x) \\ G(H(x)) & \rightarrow \quad I(x) \\ F(G(x)) & \rightarrow \quad F(F(x)) \end{cases}$$

ここで，2 つの書き換え規則の左辺に重なりが存在するとき，左辺を重ね合わせて得られる最も一般的な項 $F(G(H(x)))$ や $F(G(x))$ からは，それぞれの書き換え規則によって以下の 2 通りの書き換えが可能である．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & F(G(H(x))) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ F(I(x)) & & F(F(H(x))) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & F(G(x)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ I(G(x)) & & F(F(x)) \end{tikzcd}$$

ここで，項 $F(G(H(x)))$ から得られた項の対 $\langle F(I(x)), F(F(H(x)))\rangle$ のように，真部分項と項全体をそれぞれ書き換えて得られた項の対を内側危険対という[29]．一方，項 $F(G(x))$ から得られた項の対 $\langle I(G(x)), F(F(x))\rangle$ のように，項全体を書き換えて得られた項の対を外側危険対という[29]．R の内側危険対の集合を $CP_{in}(R)$，外側危険対の集合を $CP_{out}(R)$ と記す．R の危険対の集合を $CP(R) = CP_{in}(R) \cup CP_{out}(R)$ とする．

3 合流性基本判定条件

項書き換えシステムの合流性は一般的には決定不能であるが，さまざまな決定可能条件や十分条件が知られている[7] [8] [9] [10] [11] [12] [14] [17] [19] [23] [24] [26] [27] [29] [30] [31] [32] [33]．本研究では，以下の判定条件を用いて合流性の自動判定を行う．

定理 1 (Knuth-Bendix の合流性判定条件[19])．停止性をみたす項書き換えシステム R が合流性をみたすための必要十分条件は R の各危険対の要素が同じ正規形をもつことである．

項書き換えシステムが停止性をみたすとき，Knuth-Bendix の合流性判定条件は決定可能であり，非合流の場合には危険対から反例が得られる．

以下の例では，定理 1 を用いて合流性を判定する．

例 1． R を以下の項書き換えシステムとする．

$$R = \begin{cases} W(B(x)) & \rightarrow \quad W(x) \\ B(I(x)) & \rightarrow \quad J(x) \\ W(I(x)) & \rightarrow \quad W(J(x)) \end{cases}$$

R は停止性をみたしており，ただ 1 つの危険対 $\langle W(J(x)), W(I(x))\rangle$ の要素は同じ正規形をもつので，定理 1 より R は合流性をみたす．

例 2． R を以下の項書き換えシステムとする．

$$R = \begin{cases} W(B(x)) & \rightarrow \quad I(x) \\ B(S(x)) & \rightarrow \quad S(x) \\ W(x) & \rightarrow \quad I(x) \end{cases}$$

R は停止性をみたしているが，1 番目と 3 番目の規則から得られる危険対 $\langle I(x), I(B(x))\rangle$ の要素が同じ正規形をもたないので，定理 1 より R の非合流性が示される．

項書き換えシステム R の並行書き換え $M \twoheadrightarrow_R N$ とは，項 M の中の独立して書き換え可能な部分項を

任意個選び，同時に書き換えて N が得られることである[23] [33]．ここで，独立して書き換え可能とは，対応する書き換え規則の左辺の関数記号が重ならずに出現していることである．たとえば，次の項書き換えシステムを考える．

$$R = \begin{cases} F(x) & \to & G(x,x) \\ I(x) & \to & J(x) \end{cases}$$

このとき，項 $F(I(A))$ で書き換え可能な部分項 $F(I(A))$ と $I(A)$ は，対応する書き換え規則の左辺 $F(x)$ と $I(x)$ の関数記号 F と I が項 $F(I(A))$ 上で重ならずに出現しているので，独立して書き換え可能である．そこで，両者を同時に書き換えると $F(I(A)) \twoheadrightarrow G(J(A),J(A))$ が得られる．

定理 2 (Oostrom の合流性条件[33])．以下の条件をみたす左線形項書き換えシステム R は合流性をみたす．

1. $\forall\langle P,Q\rangle \in CP_{in}(R), P \twoheadrightarrow Q$
2. $\forall\langle P,Q\rangle \in CP_{out}(R), \exists L, P \twoheadrightarrow L \xleftarrow{*} Q$

なお，条件 2. の $L \xleftarrow{*} Q$ は決定不能な条件であるため，本論文では決定可能性を保証するために，$L \xleftarrow{*} Q$ を決定可能な条件 $L \twoheadleftarrow Q$ に制限したものを Oostrom の合流性条件とよぶことにする．実際，与えられた項から並行書き換えで得られる項は有限個なので，Oostrom の合流性条件は決定可能となる．なお，Oostrom の合流性条件は十分条件にすぎないため，この条件をみたさない場合でも，非合流と判定することはできない．

以下の例では，定理 2 を用いて合流性を判定する．

例 3． R を以下の項書き換えシステムとする．

$$R = \begin{cases} F(H(x),y) & \to & F(H(x),I(I(y))) \\ F(x,G(y)) & \to & F(I(x),G(y)) \\ I(x) & \to & x \end{cases}$$

R は停止性をみたさないため Knuth-Bendix 条件は適用できないが，R は左線形であり，1 番目と 2 番目の書き換え規則から得られる外側危険対 $\langle F(H(x),I(I(G(y)))), F(I(H(x)),G(y))\rangle$ の要素に対してそれぞれ 1 回の並行書き換えを行うと合流するので，定理 2 より合流性が示される．

本論文で用いる合流性基本判定アルゴリズムは，与えられた項書き換えシステム R の停止性を最初に調べ，停止性をみたす場合には Knuth-Bendix 条件で合流・非合流を決定する．停止性判定に失敗した場合，Oostrom 条件に基づいて合流性の判定を試みる．この判定に失敗した場合は合流・非合流は判定失敗である．したがって，合流性基本判定アルゴリズムは以下の 3 つの結果を返す．

CR	R は合流．
NONCR	R は非合流．
FAILED	判定失敗．

合流性基本判定アルゴリズム crcheck を以下に示す．

```
fun crcheck rs =
    if (lpocheck rs) then
        if (wcrcheck rs) then CR else NONCR
    else
        if (oostromcheck rs) then CR
        else FAILED
```

なお，項書き換えシステムの停止性は一般には決定不能であり[2] [5]，本アルゴリズムでは辞書式経路順序に基づく停止性の十分条件の判定のみを行っている．つまり，lpocheck は入力された項書き換えシステム rs に対して辞書式経路順序に基づく自動停止性判定を文献[15] の方法で行う．さらに，wcrcheck は危険対の要素が同じ正規形をもつか否かを調べ，Knuth-Bendix 条件による自動判定を行い，非合流ならば反例を出力する．oostromcheck は Oostrom 条件による自動判定を行う．

4 項書き換えシステムの直和分解

項書き換えシステム R の合流性判定が困難な場合に，R の部分システムの合流性から R 全体の合流性を導く方法が知られている[1] [13] [21] [22] [28] [29] [31]．

定義 1 (直和)．項書き換えシステム R_1, R_2 に含まれる関数記号の集合が互いに素であるとき，R_1 と R_2 は直和であるといい，$R_1 \cup R_2$ を $R_1 \oplus R_2$ と表す．

定理 3 (直和システムの合流性[28])．R_1, R_2 を互いに素な項書き換えシステムとする．このとき，$CR(R_1) \wedge CR(R_2) \Leftrightarrow CR(R_1 \oplus R_2)$．

以下の例では，定理 3 を用いて合流性を判定する．

例 4． R を以下の項書き換えシステムとする．

$$R = \begin{cases} F(x, A(G(x))) & \to & G(F(x,x)) \\ F(x, G(x)) & \to & G(F(x,x)) \\ A(x) & \to & x \\ H(x) & \to & H(B(H(x))) \end{cases}$$

R は停止性をみたさず左線形でもないため，Knuth-Bendix 条件も Oostrom 条件も適用できない．ここで，R を以下のように直和分解する．

$$R_1 = \begin{cases} F(x, A(G(x))) & \to & G(F(x,x)) \\ F(x, G(x)) & \to & G(F(x,x)) \\ A(x) & \to & x \end{cases}$$

$$R_2 = \left\{ \; H(x) \quad \to \quad H(B(H(x))) \right.$$

このとき，R_1 は停止性をみたすので Knuth-Bendix 条件，R_2 は左線形なので Oostrom 条件が適用可能となり，定理 3 より R の合流性が示される．

例 5．R を以下の項書き換えシステムとする．

$$R = \begin{cases} I(x) & \to & I(B(x)) \\ F(E(x), x) & \to & G(x) \\ E(x) & \to & x \end{cases}$$

R は停止性をみたさず左線形でもないため，Knuth-Bendix 条件も Oostrom 条件も適用できない．ここで，R を以下のように直和分解する．

$$R_1 = \left\{ \; I(x) \quad \to \quad I(B(x)) \right.$$

$$R_2 = \begin{cases} F(E(x), x) & \to & G(x) \\ E(x) & \to & x \end{cases}$$

このとき，R_1 に対しては Oostrom 条件より合流性が示されるが，R_2 に対しては Knuth-Bendix 条件より非合流性が示されるので，定理 3 より R の非合流性が示される．

項書き換えシステム R を $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_n (n \geq 2)$ に直和分解したとき，$R_1, R_2, \ldots, R_n$ をそれぞれ直和分解成分とよび，特にどの成分もこれ以上直和分解できないとき，最小の直和分解成分とよぶ．ここで，最小の直和分解は一意に得られることに注意する．また，直和分解成分が小さいほど合流性判定法の適用が容易となる．最小の直和分解成分は以下の分割統治法に基づくアルゴリズムによって得られる．

```
fun dj_decompose rs =
  let fun dj_merge rss =
    if ∃ rs1 rs2 ∈ rss, not(djcheck rs1 rs2)
      then dj_merge ((rss \ {rs1,rs2}) ∪ {rs1∪rs2})
      else rss
  in dj_merge (map (fn r ⇒ {r}) rs)
```

ここで，djcheck rs1 rs2 は 項書き換えシステム rs1 と rs2 の直和性を判定する．

直和分解に基づく合流性判定アルゴリズム dj_crcheck を以下に示す．

```
fun dj_crcheck rs =
   let val status = map crcheck (dj_decompose rs)
   in if (∀ result ∈ status, result = CR) then CR
      else if (∃ result ∈ status, result = NONCR)
           then NONCR
         else FAILED
```

このアルゴリズムでは，dj_decompose を用いて求められた最小の直和分解成分に対して合流性基本判定 crcheck を行う．直和分解成分がすべて合流ならば R は合流，1 つでも非合流ならば，R は非合流と判定して反例を出力する．それ以外の場合は，合流・非合流は判定失敗である．ここで，定理 3 より，直和分解成分の反例は全体の反例となっていることに注意する．

5 項書き換えシステムの可換分解

項書き換えシステム R が直和分解できない場合，R を部分システムに分解して合流性を判定する別の方法として可換分解が知られている[29]．

定義 2 (可換)．項書き換えシステム R_1, R_2 が可換であるとは，$N_1 \overset{*}{\leftarrow}_{R_1} M \overset{*}{\rightarrow}_{R_2} N_2$ ならば $N_1 \overset{*}{\rightarrow}_{R_2} M' \overset{*}{\leftarrow}_{R_1} N_2$ となる項 M' が存在することである．このとき，$R_1 \cup R_2$ を $R_1 \sqcup R_2$ と記す．

定理 4 (可換システムの合流性[29])．R_1, R_2 を項書き換えシステムとする．このとき，$CR(R_1) \wedge CR(R_2) \Rightarrow CR(R_1 \sqcup R_2)$．

以下の例では，定理 4 を用いて合流性を判定する．

例 6. R を以下の項書き換えシステムとする．

$$R = \left\{ \begin{array}{lcl} W(W(x)) & \rightarrow & W(x) \\ B(I(x)) & \rightarrow & W(x) \\ W(B(x)) & \rightarrow & B(x) \\ F(H(x),y) & \rightarrow & F(H(x),G(y)) \\ F(x,I(y)) & \rightarrow & F(G(x),I(y)) \\ G(x) & \rightarrow & x \end{array} \right.$$

ここで，R には Knuth-Bendix 条件も Oostrom 条件も適用できない．また，R を直和に分解することもできない．しかし，後ほど説明するように R は以下のように可換分解可能である．

$$R_1 = \left\{ \begin{array}{lcl} W(W(x)) & \rightarrow & W(x) \\ B(I(x)) & \rightarrow & W(x) \\ W(B(x)) & \rightarrow & B(x) \end{array} \right.$$

$$R_2 = \left\{ \begin{array}{lcl} F(H(x),y) & \rightarrow & F(H(x),G(y)) \\ F(x,I(y)) & \rightarrow & F(G(x),I(y)) \\ G(x) & \rightarrow & x \end{array} \right.$$

このとき，R_1 に対しては Knuth-Bendix 条件，R_2 に対しては Oostrom 条件が適用できるので，定理 4 より R の合流性が示される．

項書き換えシステム R_1 と R_2 の間の危険対は，R_1 と R_2 の可換性判定に重要である．たとえば，次の 2 つの項書き換えシステムを考える．

$$R_1 = \left\{ \begin{array}{lcl} F(x) & \rightarrow & I(x) \\ G(H(x)) & \rightarrow & I(x) \end{array} \right.$$

$$R_2 = \left\{ \begin{array}{lcl} F(G(x)) & \rightarrow & F(F(x)) \end{array} \right.$$

このとき，R_1 の書き換え規則の左辺と R_2 の書き換え規則の左辺の重なりから得られる項 $F(G(H(x)))$ や $F(G(x))$ からは，R_1 と R_2 の書き換え規則によって以下の 2 通りの書き換えが可能である．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \underline{F(\underline{G(H(x))})} \arrow[dl, "R_1"'] \arrow[dr, "R_2"] & \\ F(I(x)) & & F(F(H(x))) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \underline{\underline{F(G(x))}} \arrow[dl, "R_1"'] \arrow[dr, "R_2"] & \\ I(G(x)) & & F(F(x)) \end{tikzcd}$$

ここで，項 $F(G(H(x)))$ から得られた項の対 $\langle F(I(x)), F(F(H(x)))\rangle$ のように，R_1 で真部分項，R_2 で項全体をそれぞれ書き換えて得られた項の対を R_1 と R_2 の間の内側危険対という [29]．一方，項 $F(G(x))$ から得られた項の対 $\langle I(G(x)), F(F(x))\rangle$ のように，R_1 と R_2 でそれぞれ項全体を書き換えて得られた項の対を R_1 と R_2 の間の外側危険対という [29]．R_i と R_j の間の内側危険対の集合を $CP_{in}(R_i, R_j)$，R_i と R_j の間の外側危険対の集合を $CP_{out}(R_i, R_j)$ と記す．例えば，上の例においては

$$\begin{array}{rcl} CP_{in}(R_1,R_2) & = & \{\langle F(I(x)), F(F(H(x)))\rangle\} \\ CP_{out}(R_1,R_2) & = & \{\langle I(G(x)), F(F(x))\rangle\} \\ CP_{in}(R_2,R_1) & = & \emptyset \\ CP_{out}(R_2,R_1) & = & \{\langle F(F(x)), I(G(x))\rangle\} \end{array}$$

となる．また，R_i と R_j の間の危険対の集合を $CP(R_i,R_j) = CP_{in}(R_i,R_j) \cup CP_{out}(R_i,R_j)$ とする．このとき，文献 [29] の可換性条件を拡張した以下の定理が成立する．

定理 5. 以下の条件をみたす左線形項書き換えシステム R_1, R_2 は可換である．

1. $\forall \langle P, Q\rangle \in CP_{in}(R_1,R_2), P \mathrel{-\!\!\circ\!\!\twoheadrightarrow}_{R_2} Q$
2. $\forall \langle Q, P\rangle \in CP(R_2,R_1), \exists L, Q \mathrel{-\!\!\circ\!\!\twoheadrightarrow}_{R_1} L \overset{*}{\leftarrow}_{R_2} P$

(証明) 文献 [29] の定理 3.1 の並列書き換え $\mathrel{+\!\!\!\!\!\longrightarrow}$ を並行書き換え $\mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow}$ に置き換えると，文献 [33] の補題 22, 補題 27 の証明と同様な方法で証明できる．詳細を付録 A に記す． □

なお，条件 2 の $L \overset{*}{\leftarrow}_{R_2} P$ は一般には決定不能であるので，Oostrom の合流条件と同様に，本論文では $L \overset{*}{\leftarrow}_{R_2} P$ を決定可能な条件 $L \mathrel{\leftarrow\!\!\circ\!\!-}_{R_2} P$ に制限した可換性条件をもちいて可換性を判定する．

例 7. R_1, R_2 を以下の左線形項書き換えシステムとする．

$$R_1 = \left\{ \begin{array}{lcl} H(I(x)) & \rightarrow & K(J(x)) \\ J(x) & \rightarrow & K(J(x)) \end{array} \right.$$

$$R_2 = \left\{ \begin{array}{lcl} I(x) & \rightarrow & I(J(x)) \\ J(x) & \rightarrow & J(K(J(x))) \end{array} \right.$$

ここで，危険対の集合

$$\begin{array}{rcl} CP_{in}(R_1,R_2) & = & \emptyset \\ CP(R_2,R_1) & = & \{\langle H(I(J(x))), K(J(x))\rangle, \\ & & \langle J(K(J(x))), K(J(x))\rangle\} \end{array}$$

は定理 5 の可換性条件をみたしており，R_1 と R_2 は可換となる．

我々の先行研究[34] では，左線形項書き換えシステム R_1 と R_2 の間に危険対が存在しないという可換性条件を用いて可換分解を試みた．しかし，この可換性条件は R_1 と R_2 の間に危険対が存在する上記の例には適用できない．本論文の定理 5 で示した可換性条件は，先行研究[34] の可換性条件を含んでおり，従来知られている可換性条件[29] よりも強力である．実際，例 7 に文献[29] の可換性条件は適用することができない．

また，直和である 2 つの項書き換えシステムが必ずしも可換であるとは限らないことに注意する．

例 8. R_1, R_2 を以下の項書き換えシステムとする．

$$R_1 = \left\{ \; F(x,x) \;\; \rightarrow \;\; G(x) \right.$$
$$R_2 = \left\{ \; A \;\; \rightarrow \;\; B \right.$$

R_1 と R_2 は直和であるが，可換ではない．なぜなら，$G(A) \leftarrow_{R_1} F(A,A) \rightarrow_{R_2} F(B,A)$ となるが，$G(A) \rightarrow_{R_1} L \leftarrow_{R_2} F(B,A)$ となる項 L は存在しないからである．実際，$G(A) \rightarrow_{R_2} G(B) \leftarrow_{R_1} F(B,B) \leftarrow_{R_2} F(B,A)$ とはなるが，$G(B) \stackrel{*}{\leftarrow}_{R_1} F(B,A)$ とはならない．

項書き換えシステム R を $R = R_1 \sqcup R_2 \sqcup \cdots \sqcup R_n (n \geq 2)$ に可換分解したとき，$R_1, R_2, \ldots, R_n$ をそれぞれ可換分解成分とよび，特にどの成分もこれ以上可換分解できないとき，極小の可換分解成分とよぶ．ここで，極小の可換分解成分は直和分解の場合と異なり一意には求められない．

例 9. R を以下の左線形項書き換えシステムとする．

$$R = \left\{ \begin{array}{lll} I(x) & \rightarrow & I(J(x)) \\ J(x) & \rightarrow & J(K(J(x))) \\ H(I(x)) & \rightarrow & K(J(x)) \\ J(x) & \rightarrow & K(J(x)) \end{array} \right.$$

R の可換分解を試みると，$R = R_{11} \sqcup R_{12}$，$R = R_{21} \sqcup R_{22} \sqcup R_{23}$ という２通りの極小の可換分解成分を得る．

$$R_{11} = \left\{ \begin{array}{lll} I(x) & \rightarrow & I(J(x)) \\ J(x) & \rightarrow & J(K(J(x))) \end{array} \right.$$
$$R_{12} = \left\{ \begin{array}{lll} H(I(x)) & \rightarrow & K(J(x)) \\ J(x) & \rightarrow & K(J(x)) \end{array} \right.$$

ここで，例 7 より R_{11} と R_{12} は可換である．

$$R_{21} = \left\{ \begin{array}{lll} I(x) & \rightarrow & I(J(x)) \\ H(I(x)) & \rightarrow & K(J(x)) \end{array} \right.$$
$$R_{22} = \left\{ \; J(x) \;\; \rightarrow \;\; J(K(J(x))) \right.$$
$$R_{23} = \left\{ \; J(x) \;\; \rightarrow \;\; K(J(x)) \right.$$

ここで，R_{21} と R_{22}，R_{21} と R_{23} はそれぞれ互いの間に危険対が存在しないので可換である．また，R_{22} と R_{23} の間の危険対 $\langle J(K(J(x))), K(J(x)) \rangle$ は定理 5 の可換性条件をみたしており，R_{22} と R_{23} は可換である．

定理 5 に基づく極小の可換分解成分を全て求めるアルゴリズムを以下に示す．

```
fun com_decompose rs =
  let fun com_decompose1 rsss =
        ⋃ { ⋃ { com_decompose2 ⟨rs',rss\{rs'}⟩
                | rs' ∈ rss }
            | rss ∈ rsss }
      and com_decompose2 ⟨rs',rss'⟩ =
        let
        val rsps =
        { ⟨rs1,rs2⟩ | rs1 ⊎ rs2 = rs',
                      rs1, rs2 ≠ ∅,
                      allcomcheck ({rs1,rs2} ∪ rss') }
        in if rsps = {} then {{rs'} ∪ rss'}
           else com_decompose1 {{rs1,rs2} ∪ rss'
                                  | ⟨rs1,rs2⟩ ∈ rsps }
  in com_decompose1 {{rs}}
```

ここで，allcomcheck rss は rss の異なるどの 2 つの要素も定理 5 の可換性条件をみたすとき真となる．

可換分解の場合には，直和分解の場合と異なり，分解成分が小さいほど合流性判定が容易になるとは限らない．たとえば，上記で求めた極小の可換分解成分に対して，直和分解と同様に合流性基本判定 crcheck を行い，全体の合流性の判定を試みると，以下のような問題が生じる．

例 10. 以下の項書き換えシステム R を考える．

$$R = \left\{ \begin{array}{lll} F(H(x),y) & \rightarrow & G(H(x)) \\ H(I(x)) & \rightarrow & I(x) \\ F(I(x),y) & \rightarrow & G(I(x)) \end{array} \right.$$

Knuth-Bendix 条件から R は合流性をもつ．一方，上記の手続きを R に適用すると，以下の R_1 と R_2 に可換分解される．

$$R_1 = \begin{cases} F(H(x),y) & \to & G(H(x)) \\ H(I(x)) & \to & I(x) \end{cases}$$
$$R_2 = \{\ F(I(x),y) \ \to \ G(I(x))$$

このとき，$F(I(x),y) \leftarrow F(H(I(x)),y) \to G(H(I(x)))$ なる R_1 の書き換えを，R_1 で合流させることはできない．これを合流させるためには R_2 の書き換え規則が必要である．したがって，極小の可換分解成分を直接用いると，合流性判定に失敗する場合がある．

この問題を解決するために，我々のアルゴリズムでは，全ての極小の可換分解成分の集合から始めて，各成分が合流性をみたすまで可換分解成分の合併を繰り返すことにより，定理 5 に適用できる可換分解が存在するならば必ず解を得ることができる．以下に可換分解に基づく合流性判定アルゴリズムを示す．

```
fun com_crcheck rs =
if (llcheck rs) then
    let
    fun com_crcheck1 { } = FAILED
      | com_crcheck1 (rss::rsss) =
        if ∃ rs ∈ rss, (crcheck rs ≠ CR) then
          let
          val rsss1 =
              map (fn ⟨rss1,rss2⟩ ⇒
                  { rs ∪ ⋃ rss1 } ∪ rss2)
              {⟨rss1,rss2⟩
               | rss1 ⊎ rss2 = rss \ { rs },
                 rss1 ≠ ∅}
          in com_crcheck1 (rsss ∪ rsss1)
        else CR
    in com_crcheck1 (com_decompose rs)
else FAILED
```

手続き llcheck は左線形性を調べ，左線形でない場合は可換分解を行わない．$\mathrm{rsss1} \subseteq \{\{R_1,\ldots,R_n\} | R = R_1 \sqcup \cdots \sqcup R_n\}$ は可換分解候補の集合であり，すべての成分が合流性をみたす可換分解候補がある場合は R は合流，そのような可換分解候補がない場合は R の合流・非合流は判定失敗である．

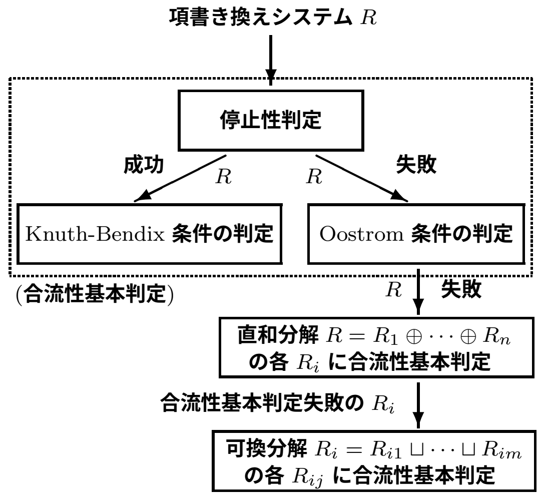


図 1　合流性自動判定システムの構成

6　合流性自動判定システムの実装と実験

これまで説明した合流性基本判定 crcheck，直和分解に基づく判定 dj_crcheck，可換分解に基づく判定 com_crcheck を組み合わせた合流性自動判定システムの構成を図 1 に示す．本システムの実装は関数型言語 SML を用いた (約 1300 行)．

本システムでは，入力された項書き換えシステム R に対して最初に合流性基本判定 crcheck を行い，適用が失敗した場合は，R を直和分解しそれぞれの成分 $R_1,\ldots,R_n$ に対して合流性基本判定 crcheck を再び試みる．成分がすべて合流ならば R は合流，1 つでも非合流ならば R は非合流と判断する．合流・非合流が判定失敗である成分 R_i が左線形の場合には，R_i の可換分解を行い，それぞれの成分 $R_{i1}\ldots R_{im}$ に対して合流性基本判定 crcheck を行う．成分がすべて合流ならば R_i は合流と判断する．なお，合流と判定されなかった可換分解成分に対して再び直和分解を試みることも可能ではあるが，今回は実行していない．

例 11. 以下の項書き換えシステム R に対する合流性自動判定システムの実行例 (図 2) を示す．

$$R = \begin{cases} F(D(x),y) & \rightarrow & F(D(x),G(G(y))) \\ F(x,E(y)) & \rightarrow & F(G(x),E(y)) \\ G(x) & \rightarrow & x \\ H(I(x)) & \rightarrow & K(J(x)) \\ J(x) & \rightarrow & K(J(x)) \\ I(x) & \rightarrow & I(J(x)) \\ J(x) & \rightarrow & J(K(J(x))) \\ S(x,T(x)) & \rightarrow & T(x) \end{cases}$$

R に対しては Knuth-Bendix 条件も Oostrom 条件も適用できない．また，直和分解あるいは可換分解のみでは合流性を判定できない．しかし，我々の自動判定システムでは，R を自動的に以下の $R = R_1 \oplus (R_2 \sqcup R_3) \oplus R_4$ に分解し，合流性判定に成功する．ここで，可換分解 $R_2 \sqcup R_3$ には定理 5 が用いられていることに注意する．文献[29] の可換分解アルゴリズムでは，このような可換分解は得られない．

$$R_1 = \begin{cases} F(D(x),y) & \rightarrow & F(D(x),G(G(y))) \\ F(x,E(y)) & \rightarrow & F(G(x),E(y)) \\ G(x) & \rightarrow & x \end{cases}$$

$$R_2 = \begin{cases} H(I(x)) & \rightarrow & K(J(x)) \\ J(x) & \rightarrow & K(J(x)) \end{cases}$$

$$R_3 = \begin{cases} I(x) & \rightarrow & I(J(x)) \\ J(x) & \rightarrow & J(K(J(x))) \end{cases}$$

$$R_4 = \begin{cases} S(x,T(x)) & \rightarrow & T(x) \end{cases}$$

項書き換えシステムの合流性に関連する論文より抜粋したさまざまな例に対して，本システムを用いた合流性自動判定を行い，その結果を表 1 に示す．参考のため，合流性や停止性が成立するかどうかも合わせて掲載した．また，実行時間が 10sec. 以上の場合は timeout とした．72 例に対して実験を行い，32 例の合流性判定，4 例の非合流性判定に成功した．36 例については判定に失敗した．1 例を除いては 1sec. 以内に結果が得られた．なお，実行時間が 100msec. 以上の 5 例は可換分解に要した時間が大きかったことが原因であると考えられる．

(入力)

```
djcom_crcheck
( IO.rdrules [
  "F(D(x),y) -> F(D(x),G(G(y)))",
  "F(x,E(y)) -> F(G(x),E(y))",
  "G(x) -> x",
  "H(I(x)) -> K(J(x))",
  "J(x) -> K(J(x))",
  "I(x) -> I(J(x))",
  "J(x) -> J(K(J(x)))",
  "S(x,T(x)) -> T(x)"
  ] );
```

(出力)

```
(disjoint)[E,G,D,F]
[ F(D(x), y) -> F(D(x), G(G(y))),
  F(x, E(y)) -> F(G(x), E(y)),
  G(x) -> x ]
'Unknown-Terminating' and
'Left-Linear' and 'Oostrom' :CR
(disjoint)[T,S]
[ S(x, T(x)) -> T(x) ]
'Terminating' and 'WCR' :CR
(disjoint)[J,K,H,I]
(Com)
[ H(I(x)) -> K(J(x)),
  J(x) -> K(J(x)) ]
'Unknown-Terminating' and
'Left-Linear' and 'Oostrom' :CR
(Com)
[ I(x) -> I(J(x)),
  J(x) -> J(K(J(x))) ]
'Unknown-Terminating' and
'Left-Linear' and 'Oostrom' :CR
djResult: CR
Result: CR
val it = true : bool
Time: 12msec.
```

図 2 合流性自動判定システムの実行例

表 1　合流性自動判定システムの実験結果

例	実行結果	時間	合流	停止	例	実行結果	時間	合流	停止
CL	CR	0	○	×	[17] p.813 定義	FAILED	0	×	×
AC	FAILED	7	○	×	[17] p.814 例	CR	109	○	×
加算 + AC	FAILED	9	○	×	[17] p.814 反例	timeout	-	×	×
加算 + C	FAILED	3	○	×	[17] p.816	CR	4	○	○
[1] 例 6	FAILED	25	○	×	[18] CL+Dk	FAILED	2	×	×
[4] p.204	FAILED	1	○	×	[18] CL+Ds	FAILED	1	×	×
[4] p.209	CR	0	○	○	[18] CL+SP	FAILED	1	×	×
[5] p.287	FAILED	0	×	×	[18] CL+Dh	FAILED	1	×	×
[9] 例 5	CR	2	○	○	[18] CL+Dh(,)	CR	2	○	×
[10] R_2	FAILED	0	×	×	[18] CL+B	FAILED	1	×	×
[10] R'_2	FAILED	1	○	×	[18] CL+B(,,)	CR	2	○	×
[10] R_6	FAILED	1	×	×	[19] 例 1	CR	8	○	○
[11] 例 1	FAILED	0	○	×	[20] 例 10	FAILED	2	○	×
[11] 例 2	FAILED	4	○	×	[21] 例 4.2.2	NONCR	0	×	○
[12] 例 2	CR	4	○	×	[21] 例 4.4.3	CR	0	○	○
[12] 例 3	NONCR	0	×	○	[22] 例 4.4	CR	0	○	○
[12] 例 4	NONCR	2	×	○	[22] 例 5.12	FAILED	3	×	×
[12] 例 6	CR	6	○	×	[23] p.14 R_1	CR	19	○	○
[12] 例 7	CR	77	○	×	[23] p.14 R_2	CR	698	○	×
[12] 例 8	CR	0	○	×	[23] p.14 R_3	CR	0	○	×
[12] 例 9	CR	3	○	×	[24] 例 1	CR	352	○	×
[13] 例 2.2.28	CR	4	○	×	[24] 例 2	FAILED	69	×	×
[13] p.28	CR	4	○	×	[25] 例 12.1	FAILED	1	○	×
[13] 例 3.3.1	FAILED	3	×	×	[25] 例 12.2	FAILED	2	○	×
[13] 例 3.3.2	FAILED	846	×	×	[25] 例 12.4	FAILED	1	○	×
[13] 例 3.4.23	CR	2	○	○	[26] 例 1	FAILED	1	○	×
[13] 例 3.5.7	CR	1	○	×	[26] 例 2	CR	5	○	×
[14] 例 1	CR	14	○	×	[26] 例 3	CR	0	○	×
[14] 例 2	FAILED	29	○	×	[27] 例 (abstract)	CR	0	○	○
[14] 例 3	FAILED	21	×	×	[27] 例 4.2	CR	2	○	○
[14] 例 5	FAILED	20	○	×	[27] 例 5.1	CR	1	○	○
[14] 例 6	CR	0	○	×	[29] 例 3.3	CR	2	○	×
[17] p.811 例	FAILED	7	×	×	[30] 例 1	FAILED	5	○	×
[17] p.811 例 a	NONCR	0	×	○	[30] 例 2	FAILED	2	○	○
[17] P.811 例 b	CR	0	○	○	[30] 例 3	FAILED	1	○	×
[17] p.813 定義	FAILED	0	×	×	[32] 例 6	FAILED	0	○	×

実行時間単位 (msec.)

判定に失敗した 36 例の中には，実装が比較的容易な合流性条件を組み込んだり，停止性判定法を強力にすることにより自動判定が可能になる例も多い．例えば，[14] 例 2, 例 5 の項書き換えシステムは，文献 [14] の条件を組み込めば合流性判定が可能である．同様にして，[10] [11] の例は，それぞれの文献の条件を組み込めば合流性判定が可能である．また，[30] 例 2 の以下の項書き換えシステム R は，本システムの辞書式経路順序では停止性が判定できないが，より強力な停止性自動判定システム [6] [16] を用いれば停止性判定に成功し，Knuth-Bendix 条件による合流性判定が可能である．

$$R = \left\{ \quad F(F(x)) \quad \rightarrow \quad F(G(F(x))) \right.$$

なお，合流性と停止性がともに成立しない場合の合流性判定は一般に困難であり，我々の実験でもこの場合の判定はすべて失敗している．

7 おわりに

本論文では，項書き換えシステムの合流性自動判定システムを実現した．本システムの特徴は，与えられた項書き換えシステムを適切な部分システムに自動分解し，それぞれの部分システムに適した合流性判定条件を適用することで，全体の合流性を自動判定する点にある．このようなアプローチに基づく合流性自動判定アルゴリズムは，我々の知る限りこれまで提案されていない．さまざまな判定条件を組み合わせた強力な合流性判定を実現するためには，本システムのアプローチが極めて有効であると考えられる．実際，我々の実装したシステム上での実験では，非常に基本的な Knuth-Bendix 条件と Oostrom 条件のみを用いているにもかかわらず，従来の合流性判定方法が適用困難な項書き換えシステムに対しても，適切な部分システムに分解することにより，合流性の自動判定に成功した．合流性が決定可能なクラス [7] [8] [9] [26] [31] に対する自動判定や，これまで提案されているさまざまな合流性条件 [7] [8] [9] [10] [11] [12] [14] [23] [24] [26] [27] [30] [31] [32] の自動判定を本システムに組み込み，さらに強力な判定システムを実現することは今後の課題である．また，本システムでは停止性自動判定を辞書式経路順序に基づく文献 [15] の方法で行ったが，より強力な既存の停止性自動判定システム [6] [16] を利用できるようになれば，さらに強力な合流性自動判定が期待できる．

謝辞

本研究は一部日本学術振興会科学研究費 17700002,19500003 の補助を受けて行われた．

参考文献

[1] Aoto, T. and Toyama, Y.: On composable properties of term rewriting systems, *Proceedings of the 6th International Joint Conference ALP'97 – HOA'97*, LNCS, Vol. 1298, Springer-Verlag, 1997, pp. 114–128.

[2] Baader, F. and Nipkow, T.: *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[3] Boudol, G.: Computational semantics of term rewriting systems, *Algebraic Methods in Semantics*(Nivat, M. and Reynolds, J. C.(eds.)), Cambridge University Press, 1985, pp. 169–236.

[4] Dershowitz, N.: Innocuous constructor-sharing combinations, *Proceedings of the 8th International Conference on Rewriting Technique and Applications (RTA-97)*, LNCS, Vol. 1232, Springer-Verlag, 1997, pp. 202–216.

[5] Dershowitz, N. and Jouannaud, J.-P.: Rewrite systems, *Handbook of Theoretical Computer Science*(van Leeuwen, J.(ed.)), Vol. B, North-Holland, 1990, pp. 243–320.

[6] Giesl, J., Thiemann, R., Schneider-Kamp, P., and Falke, S.: Mechanizing and improving dependency pairs, *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 37,No. 3(2006), pp. 155–203.

[7] Godoy, G. and Tiwari, A.: Confluence of shallow right-linear rewrite systems, *Proceedings of the 19th Annual Conference of the European Association for Computer Science Logic (CSL'05)*, LNCS, Vol. 3634, Springer-Verlag, 2005, pp. 541–556.

[8] Godoy, G., Tiwari, A., and Verma, R. M.: On the confluence of linear shallow term rewrite systems, *Proceedings of the 24th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2003)*, LNCS, Vol. 2607, Springer-Verlag, 2003, pp. 85–96.

[9] Godoy, G., Tiwari, A., and Verma, R. M.: Confluence by rewrite closure and right ground term rewrite systems, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, Vol. 15,No. 1(2004), pp. 13–36.

[10] Gomi, H., Oyamaguchi, M., and Ohta, Y.: On the Church-Rosser property of non-E-overlapping and strongly depth-preserving term rewriting sys-

tems, *Transactions of IPSJ*, Vol. 37,No. 12(1996), pp. 2147–2160.

[11] Gomi, H., Oyamaguchi, M., and Ohta, Y.: On the Church-Rosser property of root-E-overlapping and strongly depth-preserving term rewriting systems, *Transactions of IPSJ*, Vol. 39,No. 4(1998), pp. 992–1005.

[12] Gramlich, B.: Confluence without termination via parallel critical pairs, *Proceedings of the 21st Colloquium on Trees in Algebra and Programming (CAAP'96)*, LNCS, Vol. 1059, Springer-Verlag, 1996, pp. 211–225.

[13] Gramlich, B.: *Termination and Confluence Properties of Structured Rewrite Systems*, PhD Thesis, Universität Kaiserslautern, 1996.

[14] Gramlich, B. and Lucas, S.: Generalizing Newman's lemma for left-linear rewrite systems, *Proceedings of the 17th International Conference on Rewriting Technique and Applications (RTA 2006)*, LNCS, Vol. 4098, Springer-Verlag, 2006, pp. 66–80.

[15] Hirokawa, N. and Middeldorp, A.: Tsukuba termination tool, *Proceedings of the 14th International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, LNCS, Vol. 2706, Springer-Verlag, 2003, pp. 311–320.

[16] Hirokawa, N. and Middeldorp, A.: Tyrolean termination tool: techniques and features, *Information and Computation*, Vol. 205,No. 4(2007), pp. 474–511.

[17] Huet, G.: Confluent reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 27,No. 4(1980), pp. 797–821.

[18] Klop, J. W.: *Combinatory Reduction Systems*, Mathematical Centre Tracts, Vol. 127, CWI, Amsterdom, Holland, 1980.

[19] Knuth, D. E. and Bendix, P. B.: Simple word problems in universal algebras, *Computational Problems in Abstract Algebra*(Leech, J.(ed.)), Pergamon Press, 1970, pp. 263–297.

[20] Middeldorp, A., Okui, S., and Ida, T.: Lazy narrowing: strong completeness and eager variable elimination, *Theoretical Computer Science*, Vol. 167(1996), pp. 95–130.

[21] Ohlebusch, E.: *Modular Properties of Composable Term Rewriting Systems*, PhD Thesis, Universität Bielefeld, 1994.

[22] Ohlebusch, E.: On the modularity of confluence of constructor-sharing term rewriting systems, *Proceedings of the 19th Colloquium on Trees in Algebra and Programming (CAAP'94)*, LNCS, Vol. 787, Springer-Verlag, 1994, pp. 261–275.

[23] Okui, S.: Simultaneous critical pairs and Church-Rosser property, *Proceedings of the 9th International Conference on Rewriting Technique and Applications (RTA-98)*, LNCS, Vol. 1379, Springer-Verlag, 1998, pp. 2–16.

[24] Oyamaguchi, M. and Ohta, Y.: A new parallel closed condition for Church-Rosser of left-linear TRS's, *Proceedings of the 8th International Conference on Rewriting Technique and Applications (RTA-97)*, LNCS, Vol. 1232, Springer-Verlag, 1997, pp. 187–201.

[25] Peterson, G. E. and Stickel, M. E.: Complete sets of reductions for some equational theories, *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 28,No. 2(1981), pp. 233–264.

[26] Tiwari, A.: Deciding confluence of certain term rewriting systems in polynomial time, *Proceedings of the 17th IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS 2002)*, IEEE Computer Society Press, 2002, pp. 447–458.

[27] Toyama, Y.: On the Church-Rosser property of term rewriting systems, Technical Report 17672, NTT ECL, 1981. *In Japanese.*

[28] Toyama, Y.: On the Church-Rosser property for the direct sum of term rewriting systems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 34,No. 1(1987), pp. 128–143.

[29] Toyama, Y.: Commutativity of term rewriting systems, *Programming of Future Generation Computers II*(Fuchi, K. and Kott, L.(eds.)), North-Holland, 1988, pp. 393–407.

[30] Toyama, Y.: Labeling technique for term rewriting systems, *LA Symposium 98-7*, 1998. *In Japanese.*

[31] Toyama, Y.: Confluent term rewriting systems (invited talk), *Proceedings of the 16th International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, LNCS, Vol. 3467, Springer-Verlag, 2005, pp. 1. Slides are available from `http://www.nue.riec.tohoku.ac.jp/user/toyama/slides/toyama-RTA05.pdf`.

[32] Toyama, Y. and Oyamaguchi, M.: Church-Rosser property and unique normal form property of non-duplicting term rewriting systems, *Proceedings of the 4th International Workshop on Conditional (and Typed) Rewriting Systems (CTRS-94)*, LNCS, Vol. 968, Springer-Verlag, 1994, pp. 316–331.

[33] van Oostrom, V.: Developing developments, *Theoretical Computer Science*, Vol. 175,No. 1(1997), pp. 159–181.

[34] 吉田順一, 青戸等人, 外山芳人: 項書き換えシステムの合流性自動判定, 情報技術レターズ *(FIT 2007)*, Vol. 6(2007), pp. 31–34.

A 付録: 定理 5 の証明

以下では，まず証明に必要な記法や定義を導入する．$V(M)$ は項 M に存在する変数の集合を表す．$Pos(M)$ は項 M の位置集合，$PosV(M)$ を項 M の変数位置集合，$PosF(M)$ を項 M の関数位置集合を表す．ε は根位置，$u.v$ は位置 u と v の連結，$v\backslash u$ は $v.w = u$ となる位置 w を表す．$u \leq v$ を $u.w = v$ となるよう

な w が存在すること，$u \perp v$ を $v \not\leq u$ かつ $u \not\leq v$ であることとする．$u \perp v$ でないとき，$max(u,v)$ を $u \leq v$ ならば $max(u,v) = v$，$u > v$ ならば $max(u,v) = u$ と定義する．項 M に対する代入 σ の適用を $M\sigma$ と記す．$M(\sigma\rho) = (M\sigma)\rho$ とする．項 M と N の最汎単一化子を $mgu(M,N)$ と記す．

定義 3 (パターン, リデックスパターン). (1) 位置 u と線形項 l の対をパターンとよぶ．また，項 M のパターン集合を $\mathrm{Pat}(M) = \{\langle u,l\rangle \mid \exists\sigma.l\sigma = M|_u, u \in Pos(M)\}$ と定義する．(2) $l \notin V, V(l) \supseteq V(r), l:$ 線形,$\langle u,l\rangle \in \mathrm{Pat}(M)$ のとき，$\langle u, l \to r\rangle$ をリデックスパターンとよぶ．また，項 M のリデックスパターン集合を $\mathrm{Red}(M) = \{\langle u, l\to r\rangle \mid \langle u,l\rangle \in \mathrm{Pat}(M), V(l) \supseteq V(r), l \notin V\}$ と定義する．

以下ではリデックスパターン $\langle u, l\to r\rangle$ をパターン $\langle u,l\rangle$ とみなすことがある．また，混乱が生じない限り，パターンに対する定義はそのままリデックスパターンへも流用されるものとする．

$\bar{u} = \langle u,l_1\rangle, \bar{v} = \langle v,l_2\rangle$ のとき，$max(\bar{u},\bar{v}) = max(u,v)$ と定義する．$PosF(\langle u,l\rangle) = \{u.p \mid p \in PosF(l)\}$ と定義する．ここで，$\bar{u} \in Pat(M)$ とすると，$PosF(\bar{u}) \subseteq PosF(M)$ となることに注意する．また，$U \subseteq \mathrm{Pat}(M)$ のとき，$PosF(U) = \bigcup_{\bar{u}\in U} PosF(\bar{u})$ と定義する．パターン $\bar{u} = \langle u,l\rangle$ が与えられたとき，$\bar{u}|_v = \langle v\backslash u, l\rangle$，$\bar{u}|^v = \langle v.u, l\rangle$ と定義する．また，パターン集合 U が与えられたとき，$U|_v = \{\langle v\backslash u, l\rangle \mid \langle u,l\rangle \in U$ かつ $u \geq v\}$，$U|^v = \{\langle v.u,l\rangle \mid \langle u,l\rangle \in U\}$ と定義する．$\bar{v},\bar{u} \in \mathrm{Pat}(M)$ としたとき，$PosF(\bar{v},\bar{u}) = PosF(\bar{v}) \cap PosF(\bar{u})$，$V,U \subseteq \mathrm{Pat}(M)$ としたとき，$PosF(V,U) = \bigcup_{\bar{v}\in V,\bar{u}\in U} PosF(\bar{v},\bar{u})$ と定義する．

定義 4 (接続, 連立, 両立). (1) $\bar{u},\bar{v} \in \mathrm{Pat}(M)$ が接続している (connected) とは，$PosF(\bar{u},\bar{v}) \neq \emptyset$ であることをいう．(2) $U \subseteq \mathrm{Pat}(M)$ が連立している (simultaneous) とは，U のどの 2 つの要素も接続していないことをいう．$U \subseteq \mathrm{Pat}(M)$ かつ U が連立しているとき，$U\uparrow \subseteq \mathrm{Pat}(M)$ と記す．(3) $U,V \subseteq \mathrm{Pat}(M)$ が両立している (compatible) とは，U のどの要素も V のどの要素と接続していないことをいい，$U \uparrow V$ と記す．

定義 5 (重なり). $\bar{u} = \langle u,N_1\rangle, \bar{v} = \langle v,N_2\rangle \in \mathrm{Pat}(M)$ とする．このとき，$\bar{u}$ が $\bar{v}$ へ重なるとは $v\backslash u \in PosF(N_2)$ かつ $\exists\sigma.N_1\sigma = N_2|_{v\backslash u}\sigma$ であることをいい，$\bar{u} \looparrowright \bar{v}$ と記す．ここで，項 M のパターン $\langle v, N_2\sigma\rangle$ (ただし， $\sigma = mgu(N_1, N_2|_{v\backslash u})$) を $\langle\bar{u};\bar{v}\rangle$ と記す．また，$\bar{u}$ と $\bar{v}$ が重なるとは，$\bar{u}\looparrowright\bar{v}$ または $\bar{v}\looparrowright\bar{u}$ となることをいい，$\bar{u} \vartriangle \bar{v}$ と記す．また，対 $\langle\bar{u},\bar{v}\rangle$ を重なりという．

定義 6 (最内重なり). $U\uparrow, V\uparrow \subseteq \mathrm{Pat}(M), \bar{u}\in U, \bar{v} \in V, \bar{u} \vartriangle \bar{v}$ とする．ここで，$\bar{u}' \vartriangle \bar{v}'$ かつ $max(\bar{u},\bar{v}) < max(\bar{u}',\bar{v}')$ となるような $\bar{u}' \in U, \bar{v}' \in V$ が存在しないとき，$\langle\bar{u},\bar{v}\rangle$ を U と V の最内重なりとよび，$U\blacktriangle V = \{\langle\bar{u},\bar{v}\rangle \in U\times V \mid \langle\bar{u},\bar{v}\rangle$ は U と V の最内重なり $\}$ と定義する．また，$\bar{u}\looparrowright\bar{v}$ かつ $\langle\bar{u},\bar{v}\rangle \in U\blacktriangle V$ のとき，$\bar{u}\looparrowright\bar{v} \in U\blacktriangle V$ と記す．

以下ではまず (リデックス) パターンの重なりの性質について示す．

補題 1. $U\uparrow = U^- \uplus \{\bar{u}\} \subseteq \mathrm{Pat}(M)$, $\bar{v} \in \mathrm{Pat}(M)$, $\bar{v}\looparrowright\bar{u} \in \{\bar{v}\}\blacktriangle U$ とする．このとき，$U^- \uparrow \{\bar{v}\}$ である．

(証明) $\bar{u} = \langle u,N\rangle \in U, \bar{u}' = \langle u',N'\rangle \in U^-, \bar{u}' \vartriangle \bar{v}$ と仮定する．

- $u' \leq v$ の場合
  $\bar{v}\looparrowright\bar{u}$ より，$u\backslash v \in PosF(N)$ となり，$v \in PosF(\bar{u})$．また，$\bar{v}\looparrowright\bar{u}'$ より，$u'\backslash v \in PosF(N')$ となり，$v \in PosF(\bar{u}')$．このとき，$v \in PosF(\bar{u},\bar{u}') \neq \emptyset$ となり，$U\uparrow \subseteq \mathrm{Pat}(M)$ に矛盾する．
- $u' > v$ の場合
  $max(\bar{u},\bar{v}) = v < u' = max(\bar{u}',\bar{v})$, $\bar{u}' \vartriangle \bar{v}$ より，$\langle\bar{v},\bar{u}\rangle \in \{\bar{v}\}\blacktriangle U$ に矛盾する． □

補題 2. $U\uparrow = U^-\uplus\{\bar{u}\} \subseteq \mathrm{Pat}(M)$, $\bar{v}\in\mathrm{Pat}(M)$, $\bar{v}\looparrowright\bar{u} \in \{\bar{v}\}\blacktriangle U$ とする．$U^- \uparrow \{\langle\bar{u};\bar{v}\rangle\}$ である．

(証明) $PosF(\langle\bar{u};\bar{v}\rangle) = PosF(\bar{u}) \cup PosF(\bar{v})$ である．補題 1 より $U^-\uparrow\{\bar{v}\}$．また，$U^-\uparrow\{\bar{u}\}$ なので，$U^-\uparrow\{\langle\bar{u};\bar{v}\rangle\}$ である． □

補題 3. $U\uparrow \subseteq \mathrm{Pat}(M)$, $\bar{w} = \langle w,P\rangle \in \mathrm{Pat}(M)$, $U\uparrow\{\bar{w}\}, V\uparrow \subseteq \mathrm{Pat}(P)$ とする．このとき，$U\uparrow V|^w$ が成立する．

(証明) $\bar{z} \in V$ とする．このとき，$PosF(\bar{z}) \subseteq$

$PosF(P)$ より，$PosF(\bar{z}|^w) \subseteq PosF(\bar{w})$．今，$\bar{u} \in U$ とすると $PosF(\bar{u}, \bar{w}) = \emptyset$ より，$PosF(\bar{u}, \bar{z}|^w) = \emptyset$．ゆえに，$U \uparrow \{\bar{z}|^w\}$．これより，$U \uparrow V|^w$． □

次に，書き換えに関する基本的な定義を紹介する．

定義 7. $\bar{u} = \langle u, l \to r \rangle \in \mathrm{Red}(M), M|_u = l\sigma, N = M[r\sigma]_u$ であるとき，$A = \langle \bar{u}, M, N \rangle$ を書き換えステップといい，$A : M \xrightarrow{\bar{u}} N$ と表す．$A : M \xrightarrow{\bar{u}} N$ を $A : M \to N$ あるいは $M \xrightarrow{\bar{u}} N$ などと略記することがある．また，項 M から項 N への書き換え列を以下のように定義する．

- $\epsilon_M : M \xrightarrow{*} M$ は書き換え列である．
- $A : M \to L$ が書き換えステップ，$\vec{A} : L \xrightarrow{*} N$ が書き換え列であるとき，$A; \vec{A} : M \xrightarrow{*} N$ は書き換え列である．

ここで，$\vec{A} : M \xrightarrow{*} N$ を $M \xrightarrow[*]{\vec{A}} N$ とも書く．さらに，$M \xrightarrow{\bar{u}_1} M_1 \xrightarrow{\bar{u}_2} \cdots \xrightarrow{\bar{u}_n} N, \bar{u}_i = \langle u_i, l_i \to r_i \rangle (1 \leq i \leq n)$ かつ $\forall i, l_i \to r_i \in R$ であるとき，$M \xrightarrow{*}_R N$ と記す．

定義より，$A : M \xrightarrow{\bar{u}} M'$ であれば，任意の項 N，代入 ρ，位置 w に対して $N[M\rho]_w \xrightarrow{\bar{u}|^w} N[M'\rho]_w$ となることに注意する．また，$\vec{A} : M \xrightarrow{*} M'$ より得られる $N[M\rho]_w \xrightarrow{*} N[M'\rho]_w$ を $\vec{A}_{N,\rho,w}$ と記す．

定義 8 (残余)． $\bar{u} = \langle u, l_1 \to r_1 \rangle, \bar{v} = \langle v, l_2 \to r_2 \rangle \in \mathrm{Red}(M), A : M \xrightarrow{\bar{v}} N$ とする．このとき，書き換えステップ A による $\bar{u}$ の残余 (residual) $\bar{u} \backslash A$ を以下のように定義する．

$$\bar{u} \backslash A = \begin{cases} \{\bar{u}\} & (u < v \text{ かつ } u \backslash v \notin PosF(l_1)) \\ & \quad \text{または } u \perp v \text{ のとき} \\ \emptyset & (u \geq v \text{ かつ } v \backslash u \in PosF(l_2)) \text{ または} \\ & (v > u \text{ かつ } u \backslash v \in PosF(l_1)) \text{ のとき} \\ \{\langle v.w'.((v.w) \backslash u), l_1 \to r_1 \rangle \mid r_2/w' = l_2/w\} & \\ & u \geq v.w(\text{ ただし}, w \in PosV(l_2)) \text{ のとき} \end{cases}$$

このとき，$\xrightarrow{\bar{u}}_R$ ならば $\xrightarrow[*]{\bar{u} \backslash \vec{A}}_R$ であることに注意する．また，$U\uparrow \subseteq \mathrm{Pat}(M)$ としたとき，$U \backslash A = \bigcup_{\bar{u} \in U} \bar{u} \backslash A$ と定める．また，$U \backslash A$ を $U \backslash \bar{v}$ とも書く．さらに，書き換え列 $\vec{A} = A_1; A_2; \ldots; A_n$ について，$U \backslash \vec{A} = U \backslash A_1 \backslash \ldots \backslash A_n$ と定義する．

定義 9 ([33])． $U\uparrow \subseteq \mathrm{Red}(M)$ とする．U による展開書き換え列 (development rewrite sequence) は以下のように定義される．

- $\epsilon_M : M \xrightarrow{*} M$ は U による展開書き換え列である．
- $\exists \bar{u} \in U, A_1 : M \xrightarrow{\bar{u}} L$ かつ $\vec{A}_2 : L \xrightarrow{*} N$ が $U \backslash A_1$ による展開書き換え列ならば，$A_1; \vec{A}_2 : M \xrightarrow{*} N$ は U による展開書き換え列である．

U による展開書き換え列 $\vec{A} : M \xrightarrow{*} N$ が $U \backslash \vec{A} = \emptyset$ を満たすとき，$\vec{A}$ を完全展開書き換え列 (complete development rewrite sequence) とよび，$\vec{A} : M \overset{U}{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} N$ と記す．

補題 4 ([3])． $U\uparrow \subseteq \mathrm{Red}(M)$ とする．(1) $\vec{A} : M \xrightarrow{*} L$ が U による展開書き換え列ならば，$\vec{A}; \vec{B} : M \overset{U}{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} N$ なる $\vec{B} : L \xrightarrow{*} N$ が存在する．(2) $\vec{A} : M \overset{U}{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} N$ かつ $\vec{B} : M \overset{U}{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} L$ ならば，$N = L$ かつ任意の $V\uparrow \subseteq \mathrm{Red}(M)$ について，$V \backslash \vec{A} = V \backslash \vec{B}$．

従って，一般性を失うことなく，$\vec{A} : M \overset{U}{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} N$ ならば，$V \backslash \vec{A}$ を $V \backslash U$ と書いてよい．

補題 5 ([3])． $U\uparrow, V\uparrow \subseteq \mathrm{Red}(M), U \uparrow V$ であるとき，$\overset{U}{\leftarrow\!\!\circ\!\!-} \circ \overset{V}{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} \subseteq \overset{V \backslash U}{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} \circ \overset{U \backslash V}{\leftarrow\!\!\circ\!\!-}$ である．

補題 6 ([23])． $U\uparrow, V\uparrow \subseteq \mathrm{Red}(M)$, $U \uparrow V$ であるとき，$\overset{U \cup V}{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} = \overset{U}{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} \circ \overset{V \backslash U}{-\!\!\circ\!\!\rightarrow}$ である．

$U^- = U - \{\bar{u}\}$ とする．このとき，定義 8 より $U \backslash \bar{u} = U^- \backslash \bar{u}$ なので，補題 6 より，$\overset{U}{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} = \xrightarrow{\bar{u}} \circ \overset{U^- \backslash \bar{u}}{-\!\!\circ\!\!\rightarrow}$ となることに注意する．

定義 10. $U\uparrow \subseteq \mathrm{Pat}(M)$, $\vec{A} : M \xrightarrow{*} N$ とする．このとき，以下が成立するならば $U \upuparrows \vec{A}$ と記す．

- $\vec{A} = \epsilon_M$ または
- $\vec{A} = A_1; \vec{A}_2$，$A_1 : M \xrightarrow{\bar{v}} L$，$\vec{A}_2 : L \xrightarrow{*} N$ で，$U \uparrow \{\bar{v}\}$ かつ $U \backslash \bar{v} \upuparrows \vec{A}_2$

補題 7 ([23])． M を線形項，$\vec{A}, \vec{B} : M \xrightarrow{*} M'$ を書き換え列，$\vec{A}_{N,\rho,w}, \vec{B}_{N,\rho,w} : N[M\rho]_w \xrightarrow{*} N[M'\rho]_w$ を $\vec{A}, \vec{B}$ に対応する書き換え列とする．このとき，$U \subseteq \mathrm{Red}(N[M\rho]_w) - \{\bar{w}'|^w \mid \bar{w}' \in \mathrm{Red}(M)\}$ かつ $U \upuparrows \vec{A}_{N,\rho,w}$, $U \upuparrows \vec{B}_{N,\rho,w}$ ならば，$U \backslash \vec{A}_{N,\rho,w} = U \backslash \vec{B}_{N,\rho,w}$ である．

以下では書き換え列とパターンに関する性質について示す．まず，補題 8, 補題 9 を証明し，それらを用いて補題 10 を示す．

補題 8. $U\uparrow \subseteq \mathrm{Red}(M)$, $M \overset{U}{-\!\!\circ\!\!\rightarrow} M'$ とする．このとき，任意の項 N，代入 ρ，位置 w について (1)

$U|^w\!\uparrow \subseteq \mathrm{Red}(N[M\rho]_w)$，(2) $N[M\rho]_w \overset{U|^w}{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} N[M'\rho]_w$ である．

(**証明**) (1) まず，$U|^w \subseteq \mathrm{Red}(N[M\rho]_w)$ を示す．$\langle z, Z\rangle \in U$ とする．このとき，$\langle z, Z\rangle \in \mathrm{Red}(M)$ より，$\exists \sigma. Z\sigma = M|_z$．よって，$(Z\sigma)\rho = Z(\sigma\rho) = N[M\rho]_w|_{w.z}$．なので $\langle w.z, Z\rangle \in \mathrm{Red}(N[M\rho]_w)$ となる．次に $U|^w$ が連立していることを示す．$\bar{z_1}, \bar{z_2} \in U$ とすると，$PosF(\bar{z_1}, \bar{z_2}) = \emptyset$ となるので，$PosF(\bar{z_1}|^w, \bar{z_2}|^w) = \emptyset$ である．以上より，$U|^w \uparrow\subseteq \mathrm{Red}(N[M\rho]_w)$ が言えた．

(2) $M \overset{U}{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} M'$ に関する帰納法で証明する．

(B.S.) $U = \emptyset$ なので，$U|^w = \emptyset$, $M = M'$ となり $N[M\rho]_w \overset{U|^w}{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} N[M'\rho]_w$．

(I.S.) $\bar{u} = \langle u, l \rightarrow r\rangle \in U$, $M \xrightarrow{\bar{u}} L \overset{U\backslash\bar{u}}{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} M'$ とする．すると，$N[M\rho]_w \xrightarrow{\bar{u}|^w} N[L\rho]_w$ となる．また，帰納法の仮定より，$N[L\rho]_w \overset{(U\backslash\bar{u})|^w}{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} N[M'\rho]_w$．ここで，$(U\backslash\bar{u})|^w = (U|^w)\backslash(\bar{u}|^w)$ を示す．$\bar{z} = \langle z, Z\rangle \in U|^w$ とする．(i) $z \perp u$ または $z < u$ のとき．$\bar{z}\backslash\bar{u} = \{\bar{z}\}$ より，$(\bar{z}|^w)\backslash(\bar{u}|^w) = \{\bar{z}|^w\} = (\bar{z}\backslash\bar{u})|^w$．(ii) $z \geq u$ のとき．$\exists p \in PosV(l), \exists q, u.p.q = z$．よって，$\bar{z}\backslash\bar{u} = \{\langle u.p'.q, Z\rangle \mid r|_{p'} = l|_p\}$, $(\bar{z}|^w)\backslash(\bar{u}|^w) = \{\langle w.u.p'.q, Z\rangle \mid r|_{p'} = l|_p\} = (\bar{z}\backslash\bar{u})|^w$．以上より，$(U\backslash\bar{u})|^w = (U|^w)\backslash(\bar{u}|^w)$ が示された．よって，$N[M\rho]_w \xrightarrow{\bar{u}|^w} N[L\rho]_w \overset{U|^w\backslash(\bar{u}|^w)}{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} N[M'\rho]_w$ となるので，補題 6 より $N[M\rho]_w \overset{U|^w}{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow} N[M'\rho]_w$． □

補題 9. $U\!\uparrow \subseteq \mathrm{Pat}(M)$, $\bar{w} = \langle w, L\rangle \in \mathrm{Pat}(M)$, $U \uparrow \{\bar{w}\}$, $L \xrightarrow{\bar{v}} P$, $\bar{w}' = \langle w, P\rangle$ とする．このとき，$U\backslash(\bar{v}|^w) \uparrow \{\bar{w}'\}$ である．

(**証明**) $\bar{u} = \langle u, N\rangle \in U$ とし，$\bar{u}\backslash(\bar{v}|^w) \uparrow \{\bar{w}'\}$ を示す．u と w の位置関係によって場合分けする．(1) $u \perp w$ または $u < w$ のとき．このとき，$u \perp w.v$ または $u < w.v$ となるので，$\bar{u}\backslash(\bar{v}|^w) = \{\bar{u}\}$．よって，$\bar{u}\backslash(\bar{v}|^w) \uparrow \{\bar{w}'\}$．(2) $w \leq u$ のとき．$U \uparrow \{\bar{w}\}$ より，$\exists p \in PosV(L), \exists q, u = w.p.q$．ゆえに，$\bar{u}\backslash(\bar{v}|^w) = \{\langle w.p'.q, N\rangle \mid L|_p = P|_{p'}\}$．ここで $w.p' \in PosV(\bar{w}')$ なので，$PosF(\bar{u}\backslash(\bar{v}|^w), \bar{w}') = \emptyset$．よって，$\bar{u}\backslash(\bar{v}|^w) \uparrow \{\bar{w}'\}$． □

補題 10. $U\!\uparrow = U^- \uplus \{\bar{u}\} \subseteq \mathrm{Red}(M)$, $\bar{v} \in \mathrm{Red}(M)$, $\bar{v} \looparrowright \bar{u} \in \{\bar{v}\}\blacktriangle U$, $\langle \bar{v}; \bar{u}\rangle = \langle w, L\rangle$, $P \xleftarrow{\bar{v}|_w}_{R_1} L \xrightarrow{\bar{u}|_w}_{R_2} Q$ とする．このとき，$C\!\uparrow \subseteq \mathrm{Red}(P)$，$P \overset{C}{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow}_{R_2} L' \xleftarrow[*]{\vec{A}}_{R_1} Q$ ならば以下が成立する．

(1) $C|^w\!\uparrow \subseteq \mathrm{Red}(M[P\rho]_w)$．

(2) $M[P\rho]_w \xleftarrow{\bar{v}}_{R_1} M[L\rho]_w \xrightarrow{\bar{u}}_{R_2} M[Q\rho]_w$, $M[P\rho]_w \overset{C|^w}{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow}_{R_2} M[L'\rho]_w \xleftarrow[*]{\vec{A}_{M,\rho,w}}_{R_1} M[Q\rho]_w$．

(3) $U^-\backslash\bar{v} \uparrow C|^w$．

(**証明**) (1) 補題 8(1) より成り立つ．(2) 補題 8(2) より成り立つ．(3) 補題 2 より，$U^- \uparrow \{\langle w, L\rangle\}$．また，$L \xrightarrow{\bar{v}|_w} P$ なので補題 9 より，$U^-\backslash\bar{v} \uparrow \{\langle w, P\rangle\}$ である．よって，補題 3 より $U^-\backslash\bar{v} \uparrow C|^w$ となる． □

補題 11. $U\!\uparrow \subseteq \mathrm{Pat}(M)$, $\bar{w} = \langle w, L\rangle \in \mathrm{Pat}(M)$, $U \uparrow \{\bar{w}\}$, $\vec{A} : L \xrightarrow{*} P$，$M = M[L\rho]_w$ とする．このとき，$U \upuparrows \vec{A}_{M,\rho,w}$ が成立する．

(**証明**) $|\vec{A}|$ に関する帰納法で証明する．

(B.S.) $\vec{A} = \epsilon_M$ なので，成り立つ．

(I.S.) $A_1 : L \xrightarrow{\bar{v}} Q$，$\vec{A}_2 : Q \xrightarrow{*} P$，$\vec{A} = A_1; \vec{A}_2$ とする．$\{\bar{v}\} \uparrow\subseteq \mathrm{Pat}(L)$ なので，補題 3 より $U \uparrow \{\bar{v}|^w\}$ となる．また，補題 9 より $U\backslash(\bar{v}|^w) \uparrow \{\langle w, Q\rangle\}$．ここで，$|\vec{A}_2| < |\vec{A}|$ なので帰納法の仮定より，$U\backslash(\bar{v}|^w) \upuparrows \vec{A}_{2\,M,\rho,w}$ となる．よって，$U \upuparrows \vec{A}_{M,\rho,w}$ となる． □

補題 12. $U\!\uparrow \subseteq \mathrm{Red}(M)$, $\vec{A} : M \xrightarrow{*}_{R_2} M'$，$U \upuparrows \vec{A}$ であるとき，$N \overset{U}{\leftarrow\!\!\!\circ\!\!-}_{R_1} M \xrightarrow[*]{\vec{A}}_{R_2} M'$ ならば $N \xrightarrow{*}_{R_2} L \overset{U\backslash\vec{A}}{\leftarrow\!\!\!\circ\!\!-}_{R_1} M'$ となる項 L が存在する．

(**証明**) $|\vec{A}|$ に関する帰納法で証明する．

(B.S.) $\vec{A} = \epsilon_M$ なので，成り立つ．

(I.S.) $A_1 : M \xrightarrow{\bar{v}}_{R_2} M''$，$\vec{A}_2 : M'' \xrightarrow{*}_{R_2} M'$，$\vec{A} = A_1; \vec{A}_2$ とする．ここで，補題 5 より $N \xrightarrow{\bar{v}\backslash U}_{R_2} N' \overset{U\backslash\bar{v}}{\leftarrow\!\!\!\circ\!\!-}_{R_1} M''$ となる項 N' が存在する．さらに，$|\vec{A}_2| < |\vec{A}|$ なので，$N' \overset{U\backslash\bar{v}}{\leftarrow\!\!\!\circ\!\!-}_{R_1} M'' \xrightarrow[*]{\vec{A}_2}_{R_2} M'$ に帰納法の仮定が適用できて，$N' \xrightarrow{*}_{R_2} L \overset{U\backslash\bar{v}\backslash\vec{A}_2}{\leftarrow\!\!\!\circ\!\!-}_{R_1} M'$ となる項 L が存在する．ここで，$U\backslash\bar{v}\backslash\vec{A}_2 = U\backslash\vec{A}$ であるから題意が成立する． □

以下ではパターン集合間の関数位置の重なりに関する性質を示す．まず，補題 13, 補題 14 を証明し，それらを用いて補題 15 を示す．

補題 13. $V\!\uparrow = V^- \uplus \{\bar{v}\} \subseteq \mathrm{Red}(M)$, $\bar{u} \in \mathrm{Red}(M)$, $\bar{v} \looparrowright \bar{u} \in V\blacktriangle\{\bar{u}\}$, $\langle \bar{v}; \bar{u}\rangle = \bar{w} = \langle w, L\rangle$, $L \xrightarrow{\bar{v}|_w} P$, $\bar{w}' = \langle w, P\rangle$ とする．このとき，$PosF(V^-, \{\bar{w}\}) =$

$PosF(V^-\backslash\bar{v},\{\bar{w}'\})$ である．

(証明) $\bar{v}'\in V^-,\bar{v}'\vartriangle\bar{w}$ とすると，$\{\bar{v}'\}\uparrow\{\bar{v}\}$ より，$\bar{v}'\vartriangle\bar{u}$．このとき，$\bar{v}\looparrowright\bar{u}\in V\blacktriangle\{\bar{u}\}$ より，$v'\perp v$ または $v'<v$．よって，$\tilde{V}=\{\bar{v}'\in V^-\mid\bar{v}'\not\geq v\}$ とすると，$PosF(V^-,\{\bar{w}\})=PosF(\tilde{V},\{\bar{w}\})$．また，$PosF(\tilde{V}\backslash\bar{v})=PosF(\tilde{V})$ と $L\stackrel{\bar{v}|_w}{\to}P$ より，$PosF(V^-,\{\bar{w}\})=PosF(\tilde{V},\{\bar{w}\})=PosF(\tilde{V}\backslash\bar{v},\{\bar{w}'\})=PosF(V^-\backslash\bar{v},\{\bar{w}'\})$． $\square$

補題 14. $V\!\uparrow=V^-\uplus\{\bar{v}\}\subseteq\mathrm{Red}(M)$, $U\!\uparrow=U^-\uplus\{\bar{u}\}\subseteq\mathrm{Red}(M)$, $\bar{v}\looparrowright\bar{u}\in V\blacktriangle U$ とする．このとき，$PosF(V^-,U^-)=PosF(V^-\backslash\bar{v},U^-\backslash\bar{v})$ である．

(証明) $\langle\bar{v},\bar{u}\rangle\in V\blacktriangle U$ より，$v=max(\bar{v},\bar{u})<max(\bar{v}',\bar{u}')$ となるような $\bar{v}'\in V^-,\bar{u}'\in U^-$ は存在しない．よって，$w'\in PosF(V^-,U^-)$ とすると，$w'\perp v$ または $w'<v$ である．これより，$\tilde{V}=\{\bar{v}'\in V^-\mid\bar{v}'\not\leq v\},\tilde{U}=\{\bar{u}'\in U^-\mid\bar{u}'\not\leq v\}$ とすると，$PosF(V^-,U^-)=PosF(\tilde{V},\tilde{U})$ である．また，$PosF(\tilde{V})=PosF(\tilde{V}\backslash\bar{v})$, $PosF(\tilde{U})=PosF(\tilde{U}\backslash\bar{v})$．以上より，$PosF(V^-,U^-)=PosF(\tilde{V},\tilde{U})=PosF(\tilde{V}\backslash\bar{v},\tilde{U}\backslash\bar{v})=PosF(V^-\backslash\bar{v},U^-\backslash\bar{v})$． $\square$

補題 15. $U\!\uparrow=U^-\uplus\{\bar{u}\}\subseteq\mathrm{Red}(M),V\!\uparrow=V^-\uplus\{\bar{v}\}\subseteq\mathrm{Red}(M)$, $\bar{v}\looparrowright\bar{u}\in V\blacktriangle U$, $\langle\bar{v};\bar{u}\rangle=\bar{w}=\langle w,L\rangle$, $L\stackrel{\bar{v}|_w}{\to}P,\bar{w}'=\langle w,P\rangle,C\!\uparrow\subseteq\mathrm{Red}(P)$ とする．このとき，$PosF(V^-\backslash\bar{v},C|^w\cup(U^-\backslash\bar{v}))\subset PosF(V,U)$ である．

(証明) $PosF(\bar{w})=PosF(\bar{u})\cup PosF(\bar{v})$, $V^-\uparrow\{\bar{v}\}$ より $PosF(V^-,\bar{v})=\emptyset$ となるので，$PosF(V^-,\{\bar{w}\})=PosF(V^-,\{\bar{u}\})$．さらに，$C\subseteq\mathrm{Red}(P)$ より，$PosF(C)\subseteq PosF(P)$．よって，$PosF(C|^w)\subseteq PosF(\bar{w}')$ であり，$PosF(V^-\backslash\bar{v},C|^w)\subseteq PosF(V^-\backslash\bar{v},\{\bar{w}'\})$．よって，以上と補題 13, 補題 14, $\bar{v}\looparrowright\bar{u}$ より，

$$
\begin{aligned}
&PosF(V^-\backslash\bar{v},C|^w\cup U^-\backslash\bar{v})\\
&=PosF(V^-\backslash\bar{v},C|^w)\cup PosF(V^-\backslash\bar{v},U^-\backslash\bar{v})\\
&\subseteq PosF(V^-\backslash\bar{v},\{\bar{w}'\})\cup PosF(V^-,U^-)\\
&=PosF(V^-,\{\bar{w}\})\cup PosF(V^-,U^-)\\
&=PosF(V^-,\{\bar{u}\})\cup PosF(V^-,U^-)\\
&=PosF(V^-,U)\\
&\subset PosF(V,U)
\end{aligned}
$$
$\square$

$\bar{v}=\langle v,l_1\to r_1\rangle,\bar{u}=\langle u,l_2\to r_2\rangle\in\mathrm{Red}(M)$ $(V(l_1)\cap V(l_2)=\emptyset)$, $\bar{v}\looparrowright\bar{u}$ のとき，$\langle\bar{v};\bar{u}\rangle=\langle w,L\rangle$ とすると，書き換え $P\stackrel{\bar{v}}{\leftarrow}L\stackrel{\bar{u}}{\to}Q$ が得られることに注意する．なお，このとき $l_1\to r_1\in R_1,l_2\to r_2\in R_2$ とすると，$v>u$ ならば $\langle P,Q\rangle\in CP_{in}(R_1,R_2)$，$v=u$ ならば $\langle P,Q\rangle\in CP_{out}(R_1,R_2)$ となっている．また，以下では $V\!\uparrow,U\!\uparrow\subseteq\mathrm{Pat}(M)$ とするとき，$PosF(V,U)$ の要素の個数を $|M,V,U|$ と記す．

以下ではこれまで示した補題を用いて，定理 6 を証明する．

定理 6. R_1,R_2 を以下の条件をみたす左線形項書き換えシステムとする．

1. $\forall\langle P,Q\rangle\in CP_{in}(R_1,R_2),P\mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow}_{R_2}Q$
2. $\forall\langle Q,P\rangle\in CP(R_2,R_1),\exists S,Q\mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow}_{R_1}S\stackrel{*}{\leftarrow}_{R_2}P$

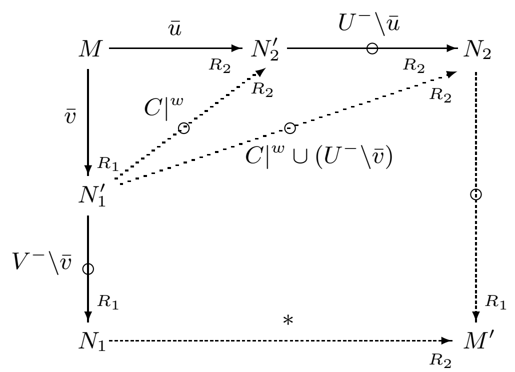
このとき，$\mathrel{\leftarrow\!\!\!\circ\!\!-}_{R_1}\circ\mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow}_{R_2}\subseteq\stackrel{*}{\rightarrow}_{R_2}\circ\mathrel{\leftarrow\!\!\!\circ\!\!-}_{R_1}$ が成立する．

(証明) $V\!\uparrow,U\!\uparrow\subseteq\mathrm{Red}(M)$, $N_1\overset{V}{\mathrel{\leftarrow\!\!\!\circ\!\!-}}_{R_1}M\overset{U}{\mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow}}_{R_2}N_2$ とするとき，$N_1\stackrel{*}{\rightarrow}_{R_2}M'\mathrel{\leftarrow\!\!\!\circ\!\!-}_{R_1}N_2$ となる項 M' が存在することを $|M,V,U|$ に関する帰納法で証明する．

(B.S.) $|M,V,U|=0$ のとき，$V\uparrow U$ なので，補題 5 より $N_1\stackrel{*}{\rightarrow}_{R_2}M'\mathrel{\leftarrow\!\!\!\circ\!\!-}_{R_1}N_2$ となる項 M' が存在する．

(I.S.) $|M,V,U|>0$ のとき，$\bar{v}\vartriangle\bar{u}$ となる $\bar{v}\in V$，$\bar{u}\in U$ が存在する．$\langle\bar{v},\bar{u}\rangle\in V\blacktriangle U$, $V^-=V-\{\bar{v}\},U^-=U-\{\bar{u}\}$ とする．

1. $v>u$ の場合，



$\langle\bar{v};\bar{u}\rangle=\langle w,L\rangle$, $P\stackrel{\bar{v}|_w}{\longleftarrow}_{R_1}L\stackrel{\bar{u}|_w}{\longrightarrow}_{R_2}Q$ とすると，仮定より $P\overset{C}{\mathrel{-\!\!\circ\!\!\!\rightarrow}}_{R_2}Q$ となる $C\!\uparrow\subseteq\mathrm{Red}(P)$ が存在する．よって，$M=M[L\rho]_w$, $N_1'=M[P\rho]_w$,

$N_2' = M[Q\rho]_w$ とすると，補題 10(2) より $N_1' \overset{\bar{v}}{\leftarrow}_{R_1} M \overset{\bar{u}}{\to}_{R_2} N_2'$, $N_1' \overset{C|^w}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_2} N_2'$ となる．また補題 6 より，$M \overset{\bar{v}}{\to}_{R_1} N_1' \overset{V^-\backslash\bar{v}}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_1} N_1$, $M \overset{\bar{u}}{\to}_{R_2} N_2' \overset{U^-\backslash\bar{u}}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_2} N_2$ である．

ここで，$\vec{A} : L \overset{\bar{u}|_w}{\to}_{R_2} Q$, $\vec{B} : L \overset{\bar{v}|_w}{\to}_{R_1} P \overset{C}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_2} Q$ として，$\vec{A}_{M,\rho,w} : M \overset{\bar{u}}{\to}_{R_2} N_2', \vec{B}_{M,\rho,w} : M \overset{\bar{v}}{\to}_{R_1} N_1' \overset{C|^w}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_2} N_2'$ に対して補題 7 の適用を試みる．すると，R_1, R_2 の左線形性より項 L は線形，補題 1 より $U^- \uparrow \{\bar{v}\}$，また補題 10(3) より $U^-\backslash\bar{v} \uparrow C|^w$，さらに $U^- \uparrow \{\bar{u}\}$ より補題 7 が適用できて，$U^-\backslash\bar{u} = U^-\backslash\bar{v}\backslash(C|^w)$．よって，$N_1' \overset{C|^w}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_2} N_2' \overset{U^-\backslash\bar{v}\backslash(C|^w)}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_2} N_2$ となる．ここで $U^-\backslash\bar{v} \uparrow (C|^w)$ なので，補題 6 より $N_1' \overset{C|^w \cup (U^-\backslash\bar{v})}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_2} N_2$．また，補題 15 より $PosF(V^-\backslash\bar{v}, (C|^w) \cup (U^-\backslash\bar{v})) \subset PosF(V, U)$ なので，$|N_1', V^-\backslash\bar{v}, (C|^w) \cup (U^-\backslash\bar{v})| < |M, V, U|$．よって，帰納法の仮定より，$N_1 \overset{*}{\to}_{R_2} M' \leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_1} N_2$ となる項 M' が存在する．

2. $v \leq u$ の場合，

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\bar{v}", "R_1"'] \arrow[d, "\bar{u}"', "R_2"] & N_1' \arrow[r, "V^-\backslash\bar{v}", "R_1"'] \arrow[d, dashed, "\vec{A}_{M,\rho,w}"', "*\ R_2"] & N_1 \arrow[d, dashed, "*\ R_2"] \\
N_2' \arrow[r, dashed, "R_1", "C|^w"'] \arrow[d, "U^-\backslash\bar{u}"', "R_2"] & K \arrow[r, dashed, "R_1", "(V^-\backslash\bar{v})\backslash\vec{A}_{M,\rho,w}"'] & N_1'' \arrow[d, dashed, "*\ R_2"] \\
N_2 \arrow[rr, dashed, "R_1"'] & & M'
\end{tikzcd}
$$

$\langle\bar{u};\bar{v}\rangle = \langle w, L\rangle$, $Q \overset{\bar{u}|_w}{\leftarrow}_{R_2} L \overset{\bar{v}|_w}{\to}_{R_1} P$ とすると，仮定より $C\!\uparrow \subseteq \mathrm{Red}(Q)$, $Q \overset{C}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_1} S \xleftarrow[*]{\vec{A}}{}_{R_2} P$ となる項 S が存在する．よって，$M = M[L\rho]_w, N_1' = M[P\rho]_w, N_2' = M[Q\rho]_w, K = M[S\rho]_w$ とすると，補題 10(2) より $N_2' \overset{\bar{u}}{\leftarrow}_{R_2} M \overset{\bar{v}}{\to}_{R_1} N_1'$, $N_2' \overset{C|^w}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_1} K \xleftarrow[*]{\vec{A}_{M,\rho,w}}{}_{R_2} N_1'$ となる．また補題 6 より，$M \overset{\bar{u}}{\to}_{R_2} N_2' \overset{U^-\backslash\bar{u}}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_2} N_2$, $M \overset{\bar{v}}{\to}_{R_1} N_1' \overset{V^-\backslash\bar{v}}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_1} N_1$ である．ここで，$\langle\bar{v}, \bar{u}\rangle \in V \blacktriangle U$ から補題 2 より $V^- \uparrow \langle w, L\rangle$．よって，補題 9 より $V^-\backslash\bar{v} \uparrow \{\langle w, P\rangle\}$．さらに，補題 11 より $V^-\backslash\bar{v} \upuparrows \vec{A}_{M,\rho,w}$．よって補題 12 より，ある項 N_1'' が存在して $K \overset{(V^-\backslash\bar{v})\backslash\vec{A}_{M,\rho,w}}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_1} N_1'' \overset{*}{\leftarrow}_{R_2} N_1$ となる．ここで，$\vec{A}' : L \overset{\bar{v}|_w}{\to}_{R_1} P \xrightarrow[*]{\vec{A}}{}_{R_2} S$, $\vec{B} : L \overset{\bar{u}|_w}{\to}_{R_2} Q \overset{C}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_1} S$ として，$\vec{A}'_{M,\rho,w} : M \overset{\bar{v}}{\to}_{R_1} N_1' \xrightarrow[*]{\vec{A}_{M,\rho,w}}{}_{R_2} K, \vec{B}_{M,\rho,w} : M \overset{\bar{u}}{\to}_{R_2} N_2' \overset{C|^w}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_1} K$ に対して補題 7 の適用を試みる．すると，R_1, R_2 の左線形性より項 L は線形，補題 1 より $V^- \uparrow \{\bar{u}\}$，補題 10(3) より $V^-\backslash\bar{u} \uparrow C|^w$ となるので，補題 7 が適用できて，$V^-\backslash\bar{v}\backslash\vec{A}_{M,\rho,w} = V^-\backslash\bar{u}\backslash(C|^w)$．よって，$N_2' \overset{C|^w}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_1} K \overset{V^-\backslash\bar{u}\backslash(C|^w)}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_1} N_1''$ となる．$V^-\backslash\bar{u} \uparrow C|^w$ なので，補題 6 より $N_2' \overset{C|^w \cup (V^-\backslash\bar{u})}{-\!\!\ominus\!\!\!\to}_{R_1} N_1''$．ここで補題 15 より，$PosF(U^-\backslash\bar{u}, (C|^w) \cup (V^-\backslash\bar{u})) \subset PosF(U, V)$ なので，$|N_2', U^-\backslash\bar{u}, (C|^w) \cup (V^-\backslash\bar{u})| < |M, U, V|$ となる．よって，帰納法の仮定より，$N_2 -\!\!\ominus\!\!\!\to_{R_1} M' \overset{*}{\leftarrow}_{R_2} N_1''$ となる項 M' が存在する．よって，$N_1 \overset{*}{\to}_{R_2} M' \leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_1} N_2$ となる項 M' が存在する．□

以下では定理 6 を用いて，定理 5 を証明する．

補題 16. R_1, R_2 を項書き換えシステムとする．このとき，$\leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_1} \circ -\!\!\ominus\!\!\!\to_{R_2} \subseteq \overset{*}{\to}_{R_2} \circ \leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_1}$ ならば $\leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_1} \circ \overset{*}{\to}_{R_2} \subseteq \overset{*}{\to}_{R_2} \circ \leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_1}$ が成立する．

(証明) $N_1 \leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_1} M \overset{*}{\to}_{R_2} N_2$ ならば，$\exists M', N_1 \overset{*}{\to}_{R_1} M' \leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_2} N_2$ となることを $M \overset{*}{\to}_{R_2} N_2$ の長さに関する帰納法で証明する．

(B.S.) $M \leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_1} M \overset{*}{\to}_{R_2} N_2$ となり，$M \overset{*}{\to}_{R_2} N_2 \leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_1} N_2$ なので成り立つ．

(I.S.) $M \to_{R_2} L \overset{*}{\to}_{R_2} N_2$ とすると，$M \to_{R_2} L$ より $M -\!\!\ominus\!\!\!\to_{R_2} L$ なので，仮定より，$\exists N_1', N_1 \overset{*}{\to}_{R_2} N_1' \leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_1} L$．また，$N_1' \leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_1} L \overset{*}{\to}_{R_2} N_2$ に対して帰納法の仮定を適用すると，$\exists M', N_1' \overset{*}{\to}_{R_2} M' \leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_1} N_2$．よって，$\exists M', N_1 \overset{*}{\to}_{R_2} M' \leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_1} N_2$ である．□

補題 17. R_1, R_2 を項書き換えシステムとする．このとき，$\leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_1} \circ \overset{*}{\to}_{R_2} \subseteq \overset{*}{\to}_{R_2} \circ \leftarrow\!\!\!\ominus\!\!-_{R_1}$ ならば R_1 と R_2 は可換である．

(証明) $N_1 \overset{*}{\leftarrow}_{R_1} M \overset{*}{\to}_{R_2} N_2$ ならば，$\exists M', N_1 \overset{*}{\to}_{R_1} M' \overset{*}{\leftarrow}_{R_2} N_2$ となることを $N_1 \overset{*}{\leftarrow}_{R_1} M$ の長さに関する帰納法で証明する．

(B.S.) $M \overset{*}{\leftarrow}_{R_1} M \overset{*}{\to}_{R_2} N_2$ となり，$M \overset{*}{\to}_{R_2}$

$N_2 \overset{*}{\leftarrow}_{R_1} N_2$ なので成り立つ．

(I.S.)$N_1 \overset{*}{\leftarrow}_{R_1} L \leftarrow_{R_1} M$ とすると，$L \leftarrow_{R_1} M$ より $L \mathrel{\leftarrow\!\!\circ\!\!-}_{R_1} M$ なので，仮定より $\exists N_2', L \overset{*}{\rightarrow}_{R_2} N_2' \mathrel{\leftarrow\!\!\circ\!\!-}_{R_1} N_2$．また，$N_1 \overset{*}{\leftarrow}_{R_1} L \overset{*}{\rightarrow}_{R_2} N_2'$ に対して帰納法の仮定を適用すると，$\exists M', N_1 \overset{*}{\rightarrow}_{R_2} M' \overset{*}{\leftarrow}_{R_1} N_2'$．よって，$\exists M', N_1 \overset{*}{\rightarrow}_{R_2} M' \overset{*}{\leftarrow}_{R_1} N_2$ となる．これより，R_1 と R_2 は可換である． □

(定理 5 の証明) 仮定および定理 6 より，$\mathrel{\leftarrow\!\!\circ\!\!-}_{R_1} \circ \mathrel{-\!\!\circ\!\!\rightarrow}_{R_2} \subseteq \overset{*}{\rightarrow}_{R_2} \circ \mathrel{\leftarrow\!\!\circ\!\!-}_{R_1}$．よって，補題 16, 補題 17 より，$R_1$ と R_2 は可換である． □