

# 「オートマトンと形式言語」補足資料(3)

## 1 NFAの計算に関する補足(教科書1.2節)

例1 例1.35におけるNFA  $N_4 = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_1, \{q_1\})$ を考える.  $w = aa$ として, 教科書の受理性の定義(p.62-63)にしたがって, 受理されることを示してみよう.

1.  $w = aa = \varepsilon a \varepsilon a$ と表わされる. そこで,  $y_1 = \varepsilon, y_2 = a, y_3 = \varepsilon, y_4 = a$ と置く.
2.  $r_0 = q_1$
3.  $r_1 = q_2 \in \delta(r_0, y_1) = \delta(q_1, \varepsilon) = \{q_3\}$
4.  $r_2 = q_1 \in \delta(r_1, y_2) = \delta(q_2, a) = \{q_1\}$
5.  $r_3 = q_2 \in \delta(r_2, y_3) = \delta(q_1, \varepsilon) = \{q_3\}$
6.  $r_4 = q_1 \in \delta(r_3, y_4) = \delta(q_2, a) = \{q_1\}$
7.  $r_4 \in \{q_1\}$

以上より,  $w$ は受理される.

## 2 NFAにおける受理性についての補足(教科書1.2節)

DFAのときに倣って(補足資料(1)),  $\hat{\delta}$ を用いたNFAの受理性の別定義を紹介する.

定義2  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を非決定性有限オートマトンとする.

1.  $R \subseteq Q$ とするとき,  $\mathcal{E}_\delta(R)$ は以下を満たす最小の集合と定義する:

- (1)  $R \subseteq \mathcal{E}_\delta(R)$

- (2) 任意の  $q \in \mathcal{E}_\delta(R)$  について,  $\delta(q, \varepsilon) \subseteq \mathcal{E}_\delta(R)$

$\mathcal{E}_\delta(R)$ を  $R$ の  $\delta$ による  $\varepsilon$ -閉包とよぶ.

2. このとき,  $\hat{\delta}: \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ を以下のように再帰的に定義する:

$$\hat{\delta}(P, w) = \begin{cases} P & (w = \varepsilon \text{ の場合}) \\ \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(P'), w') & (w = xw', x \in \Sigma \text{ の場合}) \\ \text{ただし, } P' = \bigcup_{q \in P} \delta(q, x) \end{cases}$$

NFAの遷移関数  $\delta$ は,  $\delta: Q \times \Sigma_\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ . 一方, 上で定義した関数  $\hat{\delta}$ は,  $\hat{\delta}: \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ であることに注意.

例 3 図 1.27 の非決定性有限オートマトン  $N_1 = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_1, \{q_4\})$  を考える。このとき、

$$\begin{aligned}
 \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\{q_1\}), 0101) &= \hat{\delta}(\{q_1\}, 0101) \\
 &= \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\delta(q_1, 0)), 101) \\
 &= \hat{\delta}(\{q_1\}, 101) \\
 &= \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\delta(q_1, 1)), 01) \\
 &= \hat{\delta}(\{q_1, q_2, q_3\}, 01) \\
 &= \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\delta(q_1, 0) \cup \delta(q_2, 0) \cup \delta(q_3, 0)), 1) \\
 &= \hat{\delta}(\{q_1, q_3\}, 1) \\
 &= \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\delta(q_1, 1) \cup \delta(q_3, 1)), \varepsilon) \\
 &= \hat{\delta}(\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \varepsilon) \\
 &= \{q_1, q_2, q_3, q_4\}
 \end{aligned}$$

上で定義した関数  $\hat{\delta}$  を用いると、非決定性有限オートマトンの受理する言語は、以下のように定義できる：

定義 4  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  を非決定性有限オートマトンとする。このとき、 $N$  の認識する (受理する) 言語  $L(N)$  は、次のように定義される。

$$L(N) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\{q_0\}), w) \cap F \neq \emptyset\}$$

### 3 NFA と DFA の等価性に関する補足 (教科書 定理 1.39)

前節で定義した受理性の定義を用いて、NFA と DFA の等価性の詳細な証明を示す。

定理 5  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  を非決定性有限オートマトンとする。このとき、決定性有限オートマトン  $M = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$  を以下により定義する：

1.  $Q' = \mathcal{P}(Q)$ ,
2.  $\delta'(R, x) = \mathcal{E}_\delta(\bigcup_{r \in R} \delta(r, x))$ ,
3.  $q'_0 = \mathcal{E}_\delta(\{q_0\})$ ,
4.  $F' = \{R \subseteq Q \mid R \cap F \neq \emptyset\}$ .

このとき、 $L(N) = L(M)$ 。

証明。まず、

$$\text{性質 (A) : 任意の } w \in \Sigma^*, R \subseteq Q \text{ について、} \hat{\delta}(R, w) = \widehat{\delta'}(R, w)$$

を示す。

性質 (A) の証明。文字列  $w$  の長さに関する帰納法で示す。

1.  $|w| = 0$  の場合。このとき、 $w = \varepsilon$ 。よって、

$$\hat{\delta}(R, \varepsilon) = R = \widehat{\delta'}(R, \varepsilon)$$

2.  $|w| > 0$  の場合. このとき,  $w = xw'$  ( $x \in \Sigma, w' \in \Sigma^*$ ) とおける. よって,

$$\begin{aligned} \hat{\delta}'(R, xw') &= \hat{\delta}'(\delta'(R, x), w') && (\hat{\delta}' \text{ の定義より}) \\ &= \hat{\delta}(\delta'(R, x), w') && (\text{帰納法の仮定より}) \\ &= \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\bigcup_{r \in R} \delta(r, x)), w') && (\delta' \text{ の定義より}) \\ &= \hat{\delta}(R, xw') && (\hat{\delta} \text{ の定義より}) \end{aligned}$$

(性質 (A) の証明の終わり)

従って,

$$\begin{aligned} w \in L(M) &\iff \hat{\delta}'(q_0, w) \in F' && (L(M) \text{ の定義より}) \\ &\iff \hat{\delta}'(\mathcal{E}_\delta(\{q_0\}), w) \cap F' \neq \emptyset && (F' \text{ の定義より}) \\ &\iff \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\{q_0\}), w) \cap F \neq \emptyset && (\text{性質 A より}) \\ &\iff w \in L(N) && (L(N) \text{ の定義より}) \end{aligned}$$

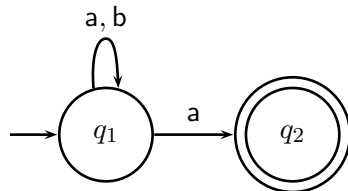
□

## 4 NFA の構成に関する補足 (1)(教科書 1.2 節)

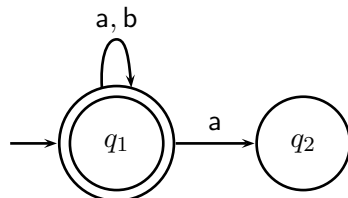
DFA のときに, 受理状態を反転 (受理状態を  $Q \setminus F$  へ変更) することで, 認識する言語が補集合になることを示した (補足資料 (1)).

それとは対照的に, NFA の場合には, 受理状態を反転したからといって, 認識する言語が補集合になるとは限らない.

**例 6** アルファベットを  $\Sigma = \{a, b\}$  とする. 以下の状態遷移図で表わされる NFA  $N_1$  を考えてみる.



このとき,  $L(N_1) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ の末尾は } a\}$  となる. 一方,  $N_1$  の受理状態を反転した NFA  $N_2$  は以下のようなになる.



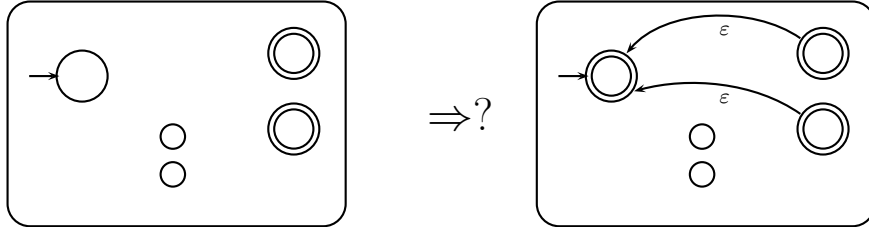
このとき,  $L(N_2) = \Sigma^*$ . よって,  $L(N_2) \neq \Sigma^* \setminus L(N_1)$ .

したがって, 一般に, 与えられた NFA の補集合を認識する有限オートマトンを構成するには, 一度, DFA へ変換した後, 受理状態を反転することになる.

## 5 NFAの構成に関する補足(2)(教科書 1.2節)

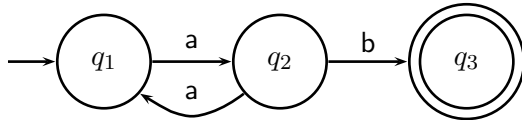
教科書 定理 1.49 で、 $A$  を認識する NFA から、 $A^*$  を認識する NFA の構成法を示している。そこでは、初期状態として、新しい状態を追加して用いているが、もとの初期状態をそのまま使ってはいけないのだろうか。

つまり、次のような構成法である：

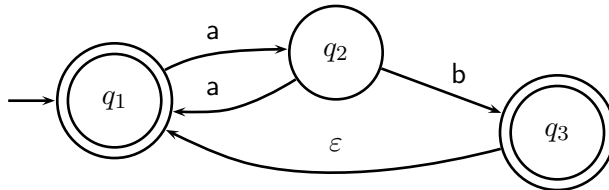


実際、以下のように、この構成では、 $A^*$  を受理する NFA にならない場合がある。

例 7 アルファベットを  $\Sigma = \{a, b\}$  とする。以下の状態遷移図で表わされる NFA  $N_3$  を考えてみる。



このとき、 $L(N_3) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ は末尾が } b \text{ でその前に奇数個の } a \text{ がある}\}$  となる。一方、 $N_3$  を上記の構成法を使って変形した NFA  $N_4$  は以下のようなになる。



このとき、 $aa \in L(N_4)$  となるが、 $L(N_3)$  の文字列を 0 回以上繰り返しても、 $aa$  は得られない。つまり、 $aa \notin L(N_3)^*$  である。

このように、(新しい初期状態の追加が必要ない場合もあるが)、一般的には、教科書のように新しい初期状態を追加する必要がある。