2022年度 数理論理学

講義資料(1)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

はじめに

証明を書くことが出来ますか?

なにを記述すれば，証明したことになるかわかっていますか?

はじめに

証明を書くことが出来ますか?

なにを記述すれば，証明したことになるかわかっていますか?

数理論理学の基本的な知識(と技)を学べば，これが(だいぶ?)わかるようになります．証明の書き方がわかれば，証明の読み方がわかります．証明の読み方がわかれば，理論への扉が開きます.

理論がわかれば，理論と実験的結果との差分も掴めるようになるでしょう．これは情報工学/情報科学を専門にする人にとってはとても大きいはずです.

数理論理学

数理論理学は「推論の方法とその正しさ」についての学問.

「真である論理式とは, 論理的な推論に従って導かれる論理式のことである.」

どのように論理的な推論に従って導かれたかを示すものを証明とよぶ.

(数理論理学以外も含めた)より幅広い論理学の文脈では, 論理的な推論は演繹的推論とよばれる.

```
          +----------+
          |  "理論"   |
     +----+----------+----+
     |        数学         |
+----+---------------------+-----+
|            数理論理学           |
-----+---------------------------------+-----
```

さまざまな場面で，理論的な解析を使うことがあるが，その道具は数学.

数学をきちんと使いこなすには，数学の基礎となる数理論理学(論理的な推論の理解とやり方，数学の仕組み・証明の仕方)を身につける必要がある.

知識とは，知っているとは

「知っている」 $\ll$ 「知っている」

- 人が言っているから…
- 教科書に書いてあるから…
- 先生が言うから…

- その理論的な結論が導かれるまでの，仮定と推論過程を辿ることができる
- 実験事実と理論的な結果にギャップがあるときに，その原因を検討できる

価値は 0　　　　価値は ∞

初等教育における論理

数学教育の**2**側面: 計算力と証明力

計算: 問題に応じて正しい計算方法を適用して解を得る.

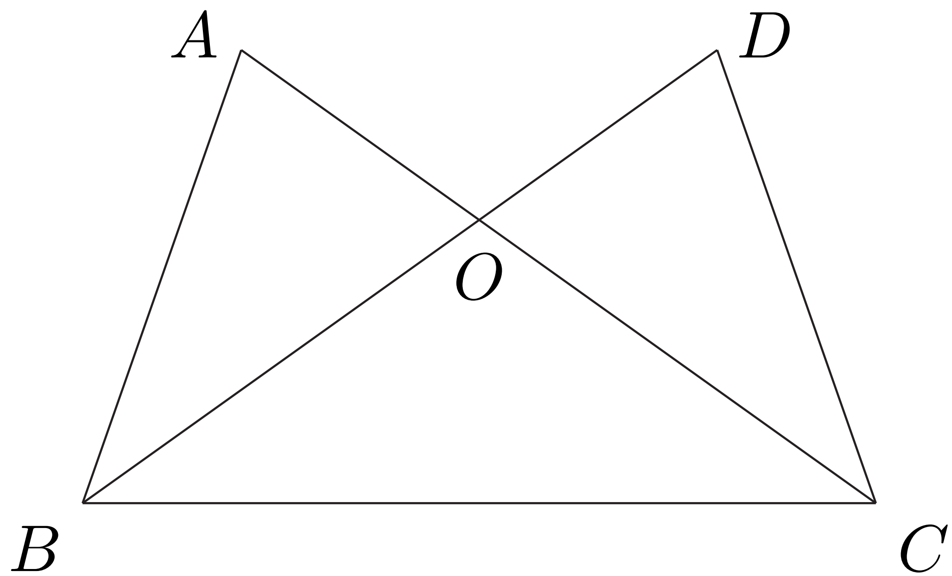
証明: 定義や公理から出発し, 論理的に正しい推論を繰り返して定理を導く.

この**2**つはとても異なる技. 計算力は早い段階から学習が始まる**(**子供は規則が大好き**(?))**. 証明力はある程度の年齢から**(**自分自身に問い掛ける態度が必要**(?))**.

計算力教育の担い手は主に解析. 証明力教育の担い手は主に幾何. 論理それ自身を学習することはない.

幾何の問題での論理的な推論の例

日本の初等教育で論理的な推論を鍛える代表選手は，中学の幾何の問題.



$|AB| = |DC|$かつ$|AC| = |DB|$とするとき，

(1) $\triangle ABC$と$\triangle DCB$が合同であることを示せ.

(2) $\triangle ABO$と$\triangle DCO$が合同であることを示せ.

三角形の合同条件:
(a) **3** 辺の長さがそれぞれ等しい.
(b) **2** 辺の長さとその間の角がそれぞれ等しい.
(c) **1** 辺の長さとその両端の角がそれぞれ等しい.

つまり，以下のような推論が正しい
「 **3** 辺の長さがそれぞれ等しい $\Rightarrow$ **2** つの三角形は合同」
「 **2** 辺の長さとその間の角がそれぞれ等しい $\Rightarrow$ **2** つの三角形は合同」
「 **1** 辺の長さとその両端の角がそれぞれ等しい $\Rightarrow$ **2** つの三角形は合同」

推論ステップを1つ1つ辿ることで示せる.

(仮定より) $|AB| = |DC|$かつ$|AC| = |DB|$ **(1)**
(等号の性質より) $|BC| = |BC|$ **(2)**
((1),(2)と合同条件(a)より) $\triangle ABC$と$\triangle DCB$が合同 **(3)**
((3)と合同性の性質より) $|AB| = |DC|$ **(4)**
((3)と合同性の性質より) $\angle OAB = \angle ODC$ **(5)**
((3)と合同性の性質より) $\angle ABC = \angle DCB$ **(6)**
((3)と合同性の性質より) $\angle ACB = \angle DBC$ **(7)**
((6),(7)と減算の性質より)

$$\begin{aligned} \angle ABO &= \angle ABC - \angle DBC \\ &= \angle DCB - \angle ACB = \angle DCO \quad \textbf{(8)} \end{aligned}$$

((5),(6),(8)と合同条件(c)より) $\triangle ABO$と$\triangle DCO$が合同

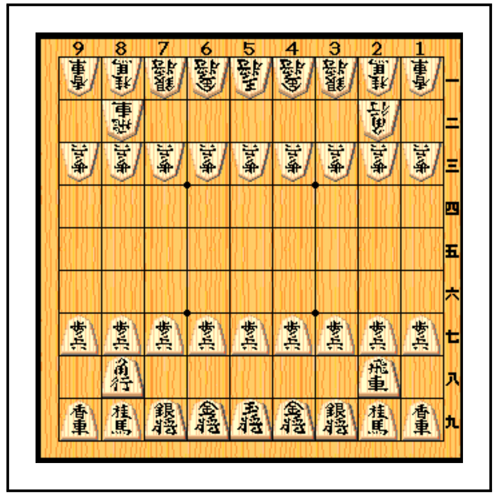
数学のすべての命題は，定義や公理から，論理的な推論によって得られる．

「有限個の開集合の共通部分は開集合である」
「ラムダ計算は合流性をもつ」
「集合 A と B が可算であればその直積も可算である」
「任意の帰納的部分順序集合は極大元をもつ」

これらは現代的な数学できちんと意味のある命題．ほとんどの人には，これらの命題のほとんどはおまじないのように意味をもたないかもしれない．

さまざまな用語の定義はその分野を勉強しないとわからないが，用いる論理的な推論はすべて共通．どのような命題も論理的な推論ステップを**1**つ**1**つ辿ることで示せる．

論理は，数学の言葉であり，ルールである



直観は頭の中で考える上で重要だが，直観に頼った推論はとても間違えやすい．論理的な推論をきちん行うことで，

- どこで間違えたか，
- どこで思わぬ仮定が推論に入り込んだか，
- どの定義が曖昧か，

などを明確にすることができる．

数理論理学とは (1)

論理学のうちでも，数理論理学 **(mathematical logic)** といった場合は，特に，数理的 **(**数学的**)** な手法を用いて体系化された論理学を指す．

“mathematical” は日本語に直訳すると「数学的な」．これは，数学的なモデル化および数学的な解析を行うという方法論を指している．推論の枠組みを厳密に定めて，その枠組みのなかでなら必ず正しくなる，そのような推論だけを対象にするアプローチ．

この講義でいう「論理学」は「数理論理学」のことを指す．「数理論理学」の代わりに「記号論理学」という言葉も使われる．

数理論理学とは (2)

社会科学一般においては，「論理学」はもっと広い分野を指すことが多い．一方，数学科で「論理学」という場合は，もう少し狭く「数学基礎論」を指していることが多い．

さまざまな「論理学」

人文系 — 論理学 (数理論理学以外も含む)

理工学系 — 数理論理学 (数学基礎論以外も含む) ← 本講義

数学科 — 数学基礎論

このような状況なので，論理学関係の本を購入するときは注意が必要．タイトルに“論理学”とついているからといって，参考になる本とは限らない!

目次

- はじめに ～論理とは～
- 論理学概観 ～論理学の歴史を振り返りながら～

(お断り) 以下で紹介する歴史の話は，講義内容を俯瞰するための参考に紹介するものであり，史実の確かさについて保証するものではありません．

アリストテレス論理学

論理学の始まりといわれているのはギリシャのアリストテレス **(Aristotle, B.C.384–322).** アリストテレス論理学はその後 **17** 世紀まで論理学の基礎であった.

アリストテレスは，以下の **4** つのタイプの言明について，**syllogism** とよばれる推論がどのような場合に正しいか議論した.

All X is Y
No X is Y
Some X is Y
Some X is not Y

アリストテレス論理学

以下は正しい論理的な推論か？

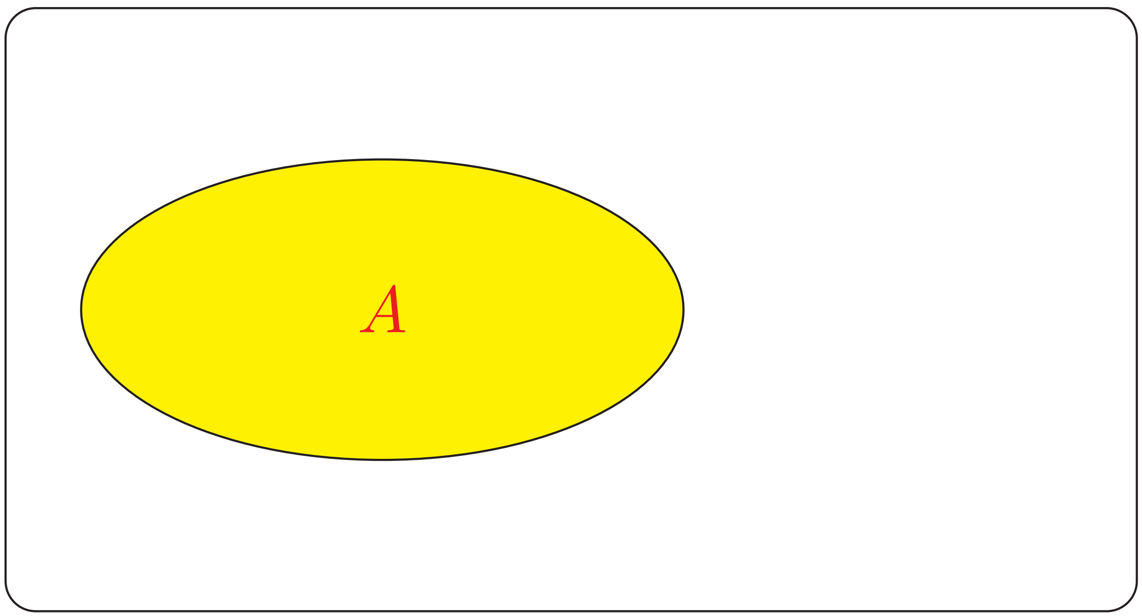
(1) **All X is Y**
Therefore, **All non-Y is non-X**

(2) **All X is Y**
No Z is Y
Therefore, **No Z is X**

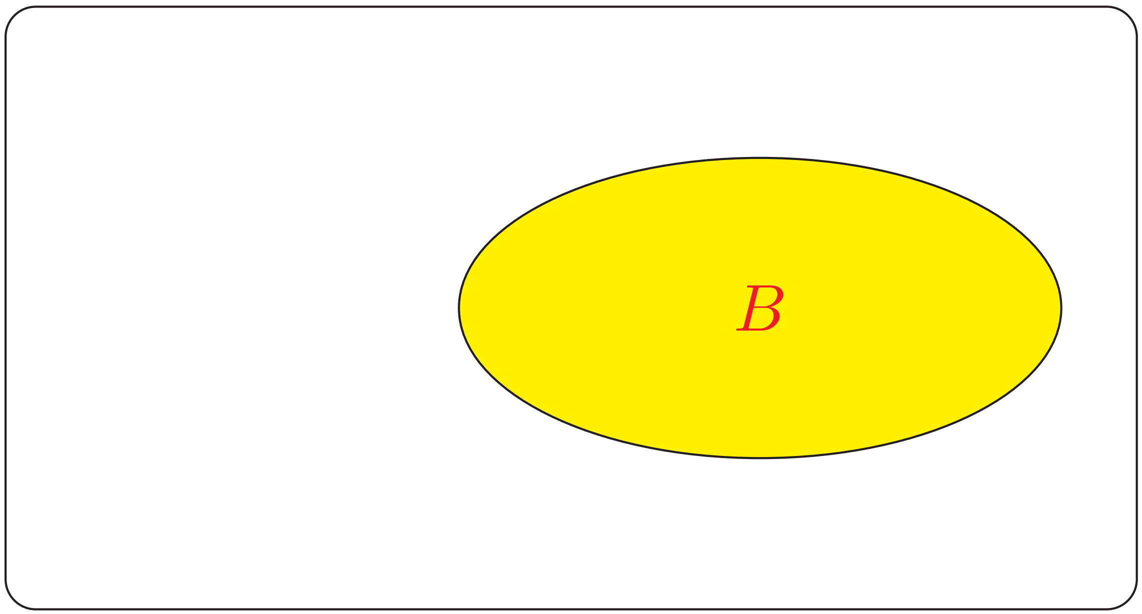
(3) **All X is Y**
Some Z is Y
Therefore, **Some Z is non-X**

Venn Diagrams ベン図

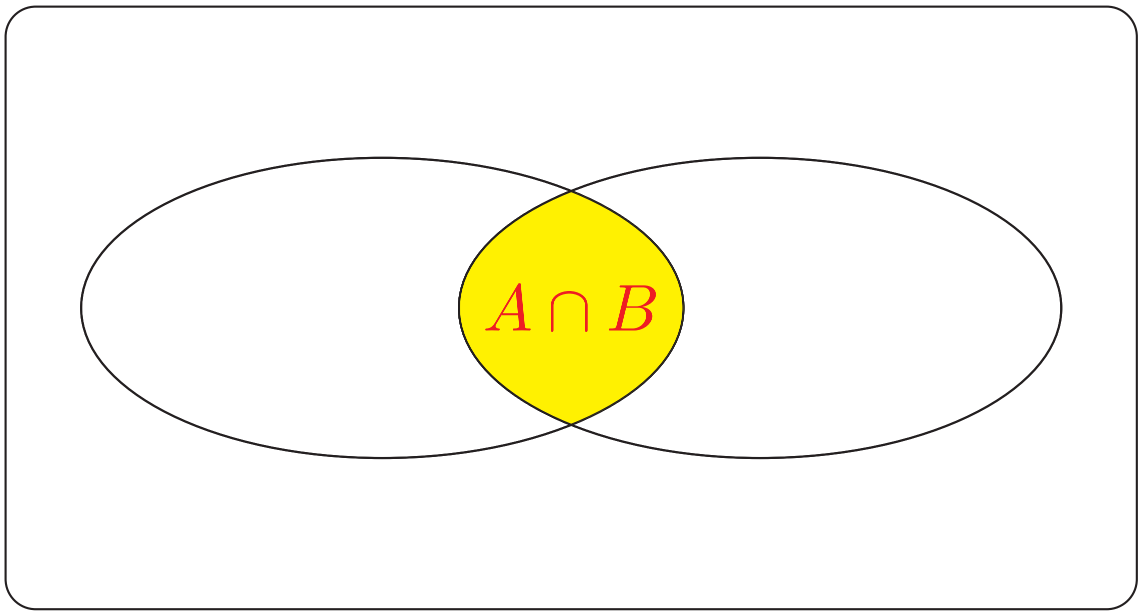
(Venn, 1881) 論理的な推論はベン図を使うと考えやすい.



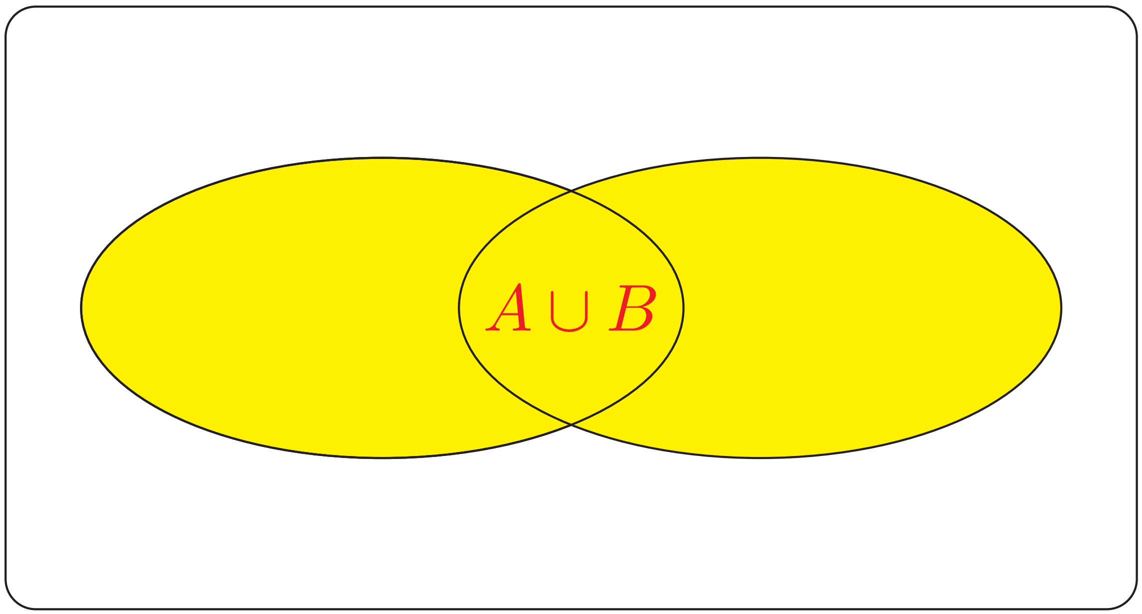
Venn Diagrams ベン図



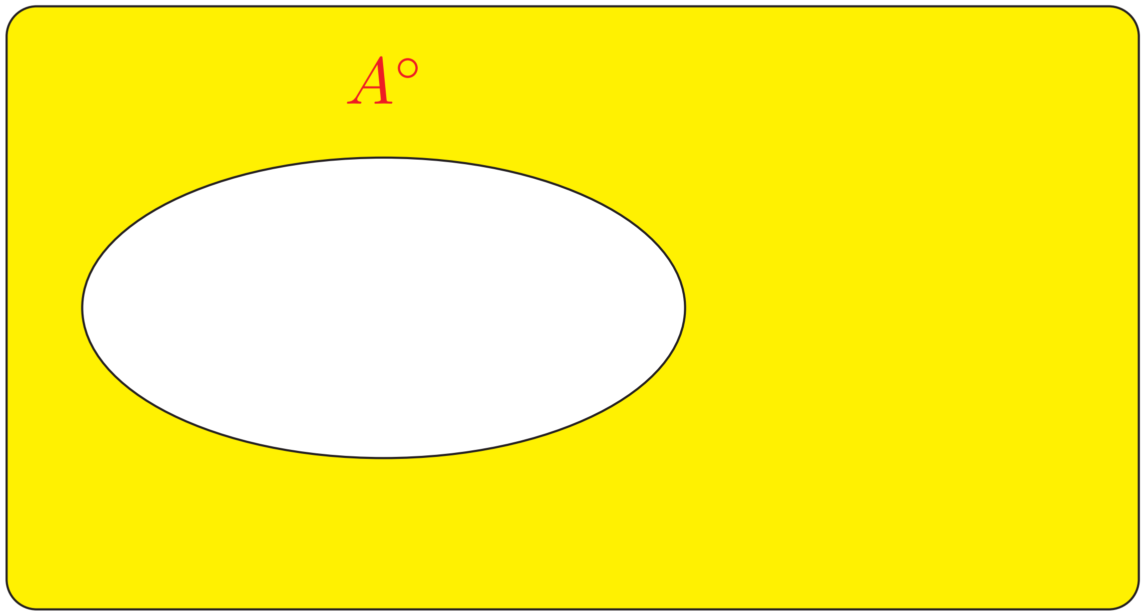
Aと Bの積(共通部分)



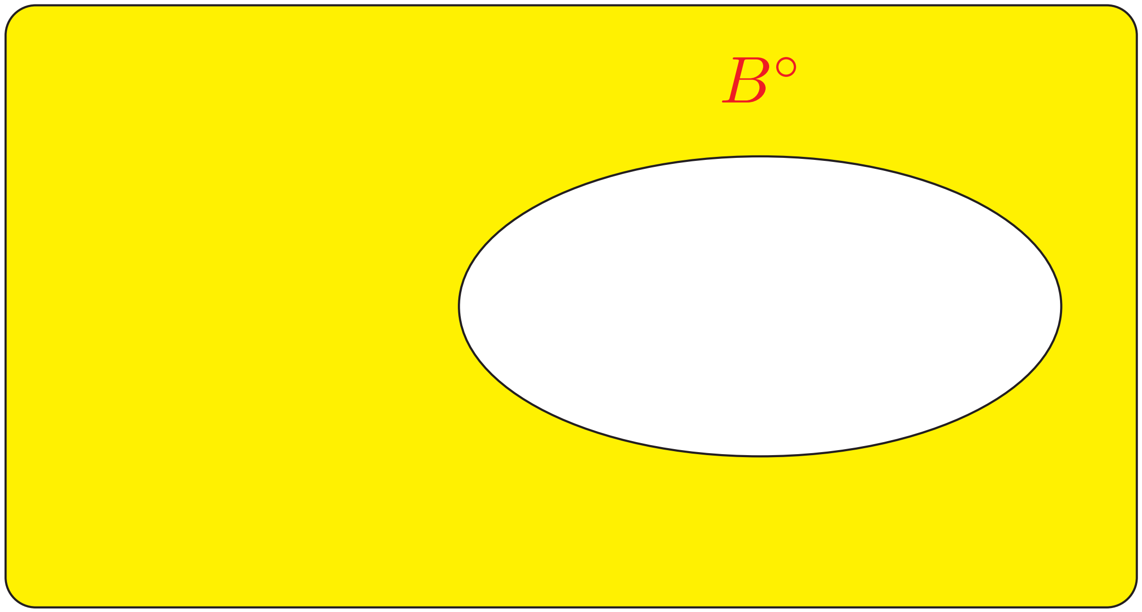
Aと Bの和(合併)



Aの反転

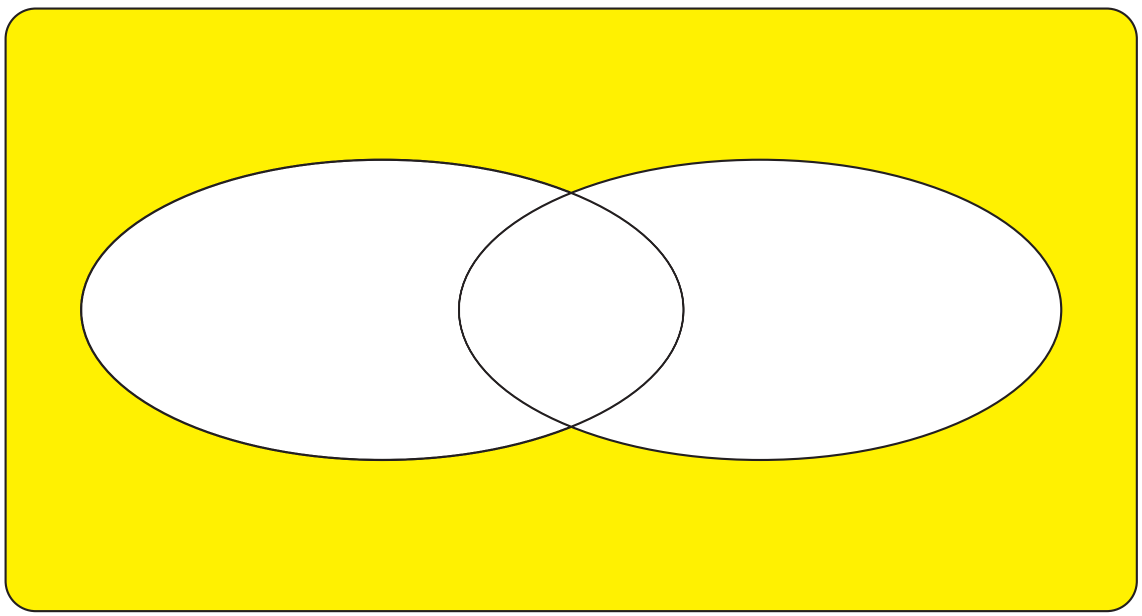


Bの反転



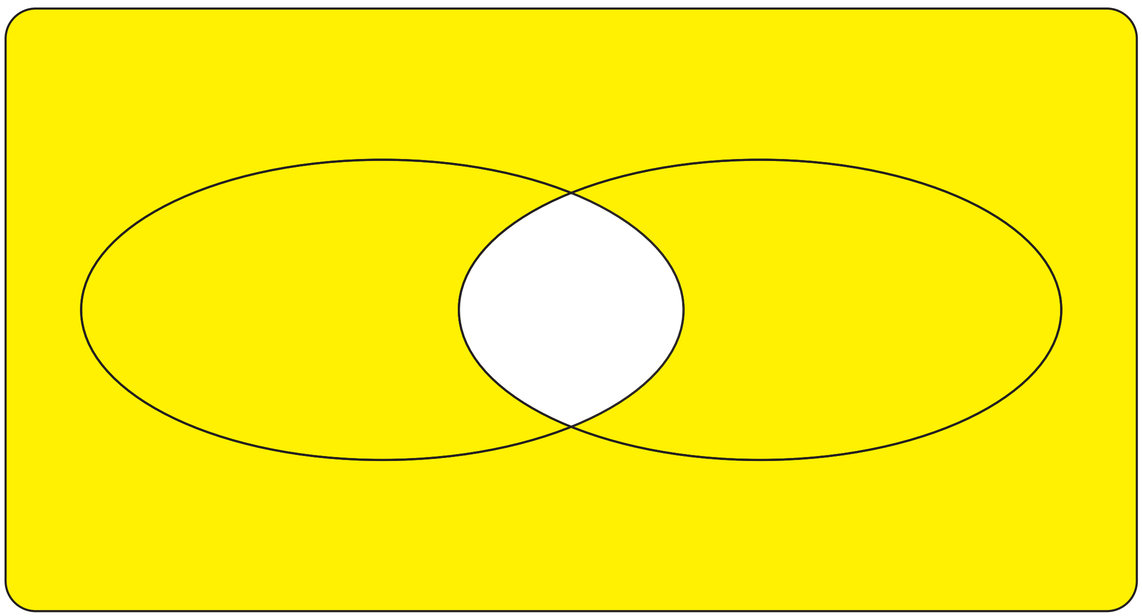
ド・モルガンの法則 (1)

$$(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

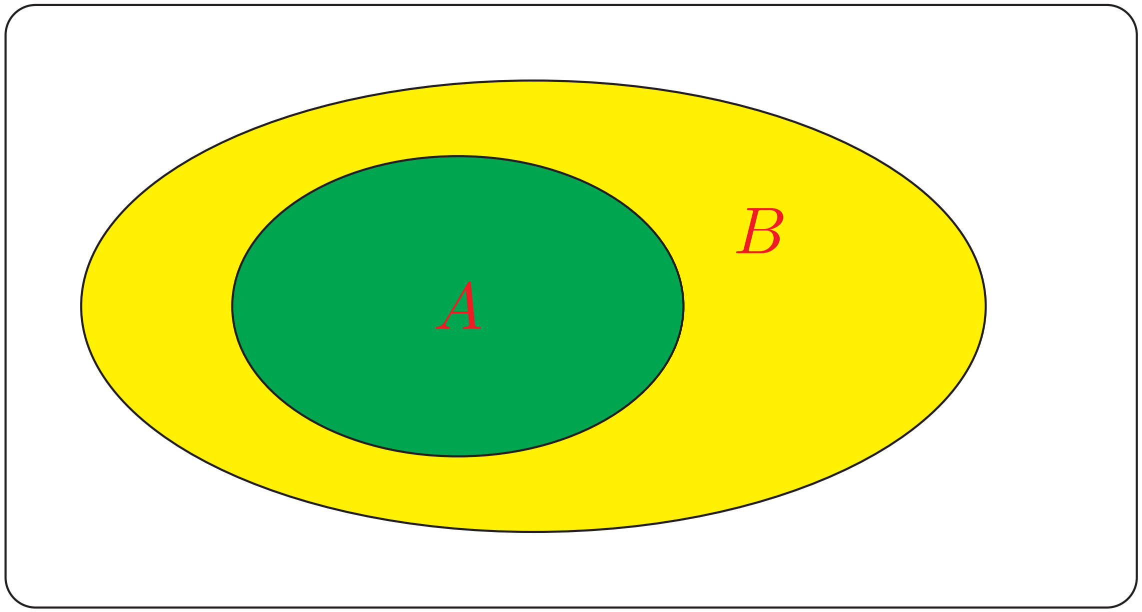


ド・モルガンの法則 (2)

$$(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cup B^{\circ}$$



部分集合 ($A \subseteq B$)



$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$$
$$\Leftrightarrow A \cap B^{\circ} = 0 \Leftrightarrow A^{\circ} \cup B = 1$$

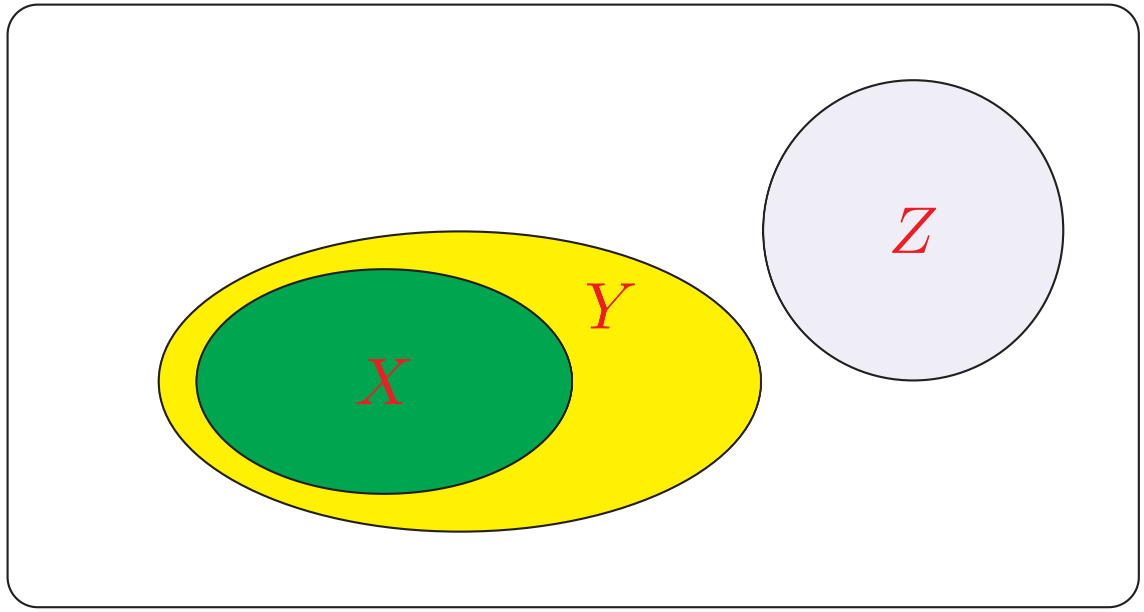
(ここで，0は空集合，1は全体集合を表す．)

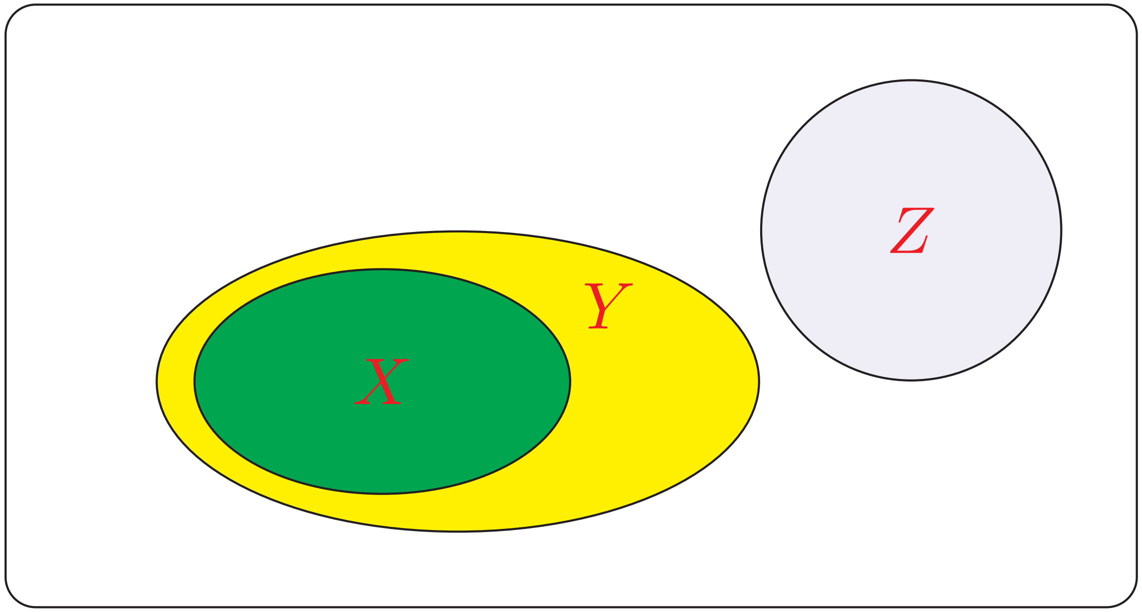
アリストテレス論理学(再)

前の推論(2)をベン図を使って考えてみると？

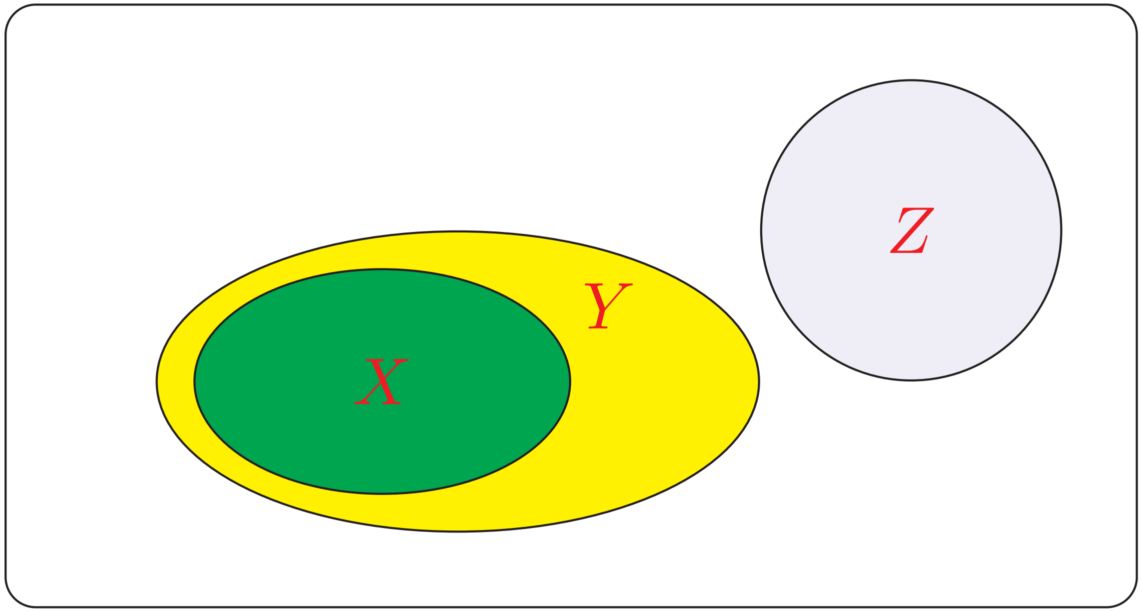
All X is Y
No Y is Z
$\boldsymbol{Therefore,}$ **No X is Z**

$X \subseteq Y$
$Y \cap Z = 0$
$\boldsymbol{Therefore,}\ X \cap Z = 0$


X
Y
Z



- 複雑な命題になると，ベン図ではうまく表わせない．
- ベン図の表現は直観的だが，これが根本的な推論ステップなのだろうか?



- 複雑な命題になると，ベン図ではうまく表わせない．
- ベン図の表現は直観的だが，これが根本的な推論ステップなのだろうか?

$\Longrightarrow$ 真理値表を用いた推論の発明へ

真理値

真理値
命題が正しい/正しくないと考えるかわりに，命題それぞれが，真(正しい場合)や偽(正しくない場合)という値をもっていると考える

命題結合子

「 $Y \cap Z = 0$」(Y と Z の共通部分は空)
$\Longleftrightarrow$ 命題「 $x \in Y \cap Z$」の値は偽
$\Longleftrightarrow$ 命題「 $(x \in Y)$ かつ $(x \in Z)$」の値は偽

「 かつ」は，単純な命題「 $x \in Y$」と「 $x \in Z$」から，より複雑な命題を構成する．このようなものを命題結合子とよぶ.

同様にして，

$Y \cup Z$ に対応する命題結合子「 または」
Y° に対応する命題結合子「 **not** (～でない)」

も導入できる

いろいろな命題結合子

$A \wedge B$

命題Aと命題Bが共に正しいことを表わす命題
読み方:「AかつB」,「A **and** B」
$\wedge$: 論理積記号

$A \vee B$

命題Aと命題Bのどちらかが正しいことを表わす命題
(A, Bの両方が正しい場合も含む)
読み方:「AまたはB」,「A **or** B」
$\vee$: 論理和記号

$\neg A$

命題Aが正しいときに正しくなく，正しくないときに正しい命題

読み方:「 **not** A」,「 Aの否定」,「 Aでない」

$\neg$: 否定記号

例: 集合演算の性質

$$
\begin{aligned}
x \in (U \cap V) \quad &\Longleftrightarrow \quad (x \in U) \wedge (x \in V) \\
x \in (U \cup V) \quad &\Longleftrightarrow \quad (x \in U) \vee (x \in V) \\
x \in U^{\circ} \quad &\Longleftrightarrow \quad \neg(x \in U)
\end{aligned}
$$

$\neg A$

命題Aが正しいときに正しくなく，正しくないときに正しい命題

読み方:「 **not** A」,「 Aの否定」,「 Aでない」

$\neg$: 否定記号

例: 集合演算の性質

$$
\begin{aligned}
x \in (U \cap V) &\iff (x \in U) \wedge (x \in V) \\
x \in (U \cup V) &\iff (x \in U) \vee (x \in V) \\
x \in U^{\circ} &\iff \neg(x \in U)
\end{aligned}
$$

$A \to B$

命題Aが正しいとき命題Bが正しくなるような命題

読み方:「 AならばB」,「 A **implies** B」

$\to$: 含意(がんい)記号

真理値表

命題 A, B の真 **(T)** 偽 **(F)** が決まったときの，命題 $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ の真偽を表にしたもの

A	$\neg A$
T	F
F	T

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

A	B	$A \rightarrow B$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

複雑な命題の真理値

含まれているそれぞれの命題の真理値によって，複雑な命題の真理値は決まる．

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

1ステップ，**1**ステップに，真理値表を繰り返し適用すれば計算できる．

$A \to B$の真理値 (1)

$X \subseteq Y \Leftrightarrow a \in X$ **implies** $a \in Y$

$$
\begin{aligned}
X \subseteq Y &\Leftrightarrow X \cap Y^\circ = 0 \\
&\Leftrightarrow a \notin X \cap Y^\circ \\
&\Leftrightarrow a \in (X \cap Y^\circ)^\circ \\
&\Leftrightarrow a \in X^\circ \cup (Y^\circ)^\circ \\
&\Leftrightarrow a \in X^\circ \cup Y \\
&\Leftrightarrow a \in X^\circ \textbf{ or } a \in Y \\
&\Leftrightarrow \textbf{(not } a \in X\textbf{) or } a \in Y
\end{aligned}
$$

つまり，$A \to B$と$\neg A \vee B$の論理的な意味は同じ．

$A \to B$の真理値 (2)

$A \to B$の真理値表:

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$	$A \to B$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

真理値表(再)

命題 A, B の真 **(T)** 偽 **(F)** が決まったときの，命題 $\neg A$, $A \land B$, $A \lor B$, $A \to B$ の真偽を表にしたもの

A	$\neg A$
T	F
F	T

A	B	$A \land B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

A	B	$A \lor B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

A	B	$A \to B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

アリストテレス論理学(再)

前の推論(2)を真理値の計算を使って考えてみると？

All X is Y
No Y is Z
Therefore, **No X is Z**

$x \in X \to x \in Y$
$x \in Y \to \neg\,(x \in Z)$
$\boldsymbol{Therefore,}\ x \in X \to \neg\,(x \in Z)$

「 $x \in X \to x \in Y$」は，T
「 $x \in Y \to \neg\, x \in Z$」は，T
そのとき，「 $x \in X \to \neg\, x \in Z$」は，T

実際に，真理値表で確認してみると...

$x \in X$	$x \in Y$	$x \in Z$	$x \in X$ $\to x \in Y$	$\neg(x \in Z)$	$x \in Y$ $\to \neg(x \in Z)$	$x \in X$ $\to \neg(x \in Z)$
T	T	T	T	F	F	F
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T

Algebra 'al-jabr'

Algebra(代数**)**というと現在では抽象代数を指すが，語源はアラビア語の**'al-jabr'**:
式の変形によって等式の解を得る方法

$$
\begin{aligned}
& 1 + x = 3 - x \\
\Rightarrow \quad & 2x = 3 - 1 \\
\Rightarrow \quad & 2x = 2 \\
\Rightarrow \quad & x = 1
\end{aligned}
$$

Algebra 'al-jabr'

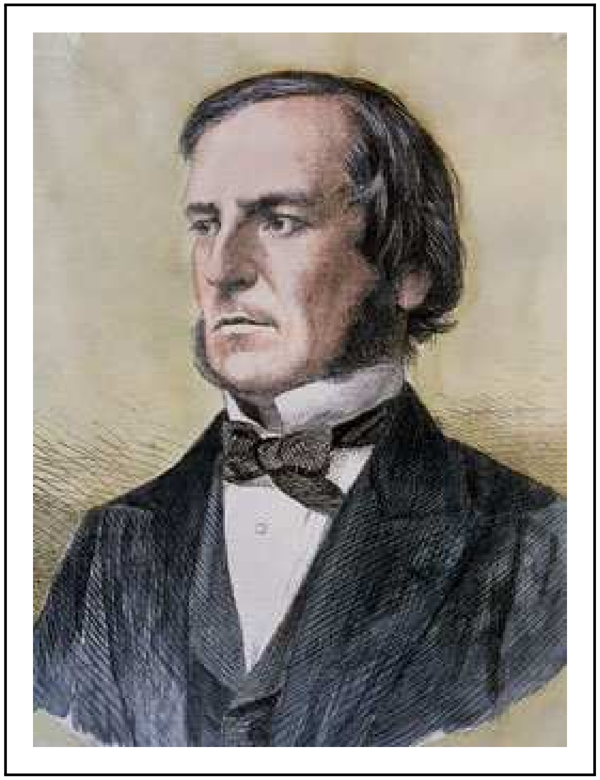
Algebra(代数)というと現在では抽象代数を指すが，語源はアラビア語の**'al-jabr'**:

式の変形によって等式の解を得る方法

$$
\begin{aligned}
& 1 + x = 3 - x \\
\Rightarrow \quad & 2x = 3 - 1 \\
\Rightarrow \quad & 2x = 2 \\
\Rightarrow \quad & x = 1
\end{aligned}
$$

論理推論を式変形のように簡単にできないか.

ジョージ・ブール



(George Boole, 1815-1864)

(画像はウィキペディアより引用)

ブール代数

式変形にもとづく 論理推論，"論理の代数"

A. De Morgan (Formal Logic, 1874), George Boole (Calculus of Thought, 1854), C.S. Pierce, Ernst Schröder (The Algebra of Logic, 1890), W.S.Jevons (Pure Logic, 1864; Elementary Lessons in Logic, 1870).

1. $X \cup X = X$
2. $X \cap X = X$
3. $X \cup Y = Y \cup X$
4. $X \cap Y = Y \cap X$
5. $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup X$
6. $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap X$

7. $X \cap (X \cup Y) = X$
8. $X \cup (X \cap Y) = X$
9. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
10. $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
11. $X \cup X^\circ = 1$
12. $X \cap X^\circ = 0$
13. $(X^\circ)^\circ = X$
14. $X \cup 1 = 1$
15. $X \cap 1 = X$
16. $X \cup 0 = X$
17. $X \cap 0 = 0$
18. $(X \cup Y)^\circ = X^\circ \cap Y^\circ$
19. $(X \cap Y)^\circ = X^\circ \cup Y^\circ$

アリストテレス論理学(再)

$$X \subseteq Y \tag{1}$$
$$Y \cap Z = 0 \tag{2}$$
$$\textbf{\textit{Therefore,}}\ X \cap Z = 0$$

By (1)	$X \cap Y^\circ = 0$	(3)
By (3)	$X \cap Y^\circ \cap Z = 0$	(4)
By (2)	$X \cap Y \cap Z = 0$	(5)
By (4),(5)	$(X \cap Y \cap Z) \cup (X \cap Y^\circ \cap Z) = 0$	(6)
By (6)	$(X \cap Z) \cap (Y \cup Y^\circ) = 0$	(7)
By (7)	$(X \cap Z) \cap 1 = 0$	(8)
By (8)	$X \cap Z = 0$	

2つの方法論

1. 真理値表にもとづく方法

真と偽という命題の “意味” を考える
「正しさ」とは：　どんな場合にも真になること
「意味論」

2. ブール代数の等式による導出

規則によって，機械的に導出ができるかを考える．
「正しさ」とは：　導くことができること
「構文論」

まったく異なる2つの方法なのに，この2つの方法が示す「正しさ」は同じ(！) (「完全性」)

エミール・レオン・ポスト

(Emil Leon Post, 1897-1954)

(画像はウィキペディアより引用)

数学の厳密化

　論理学が **18** 世紀までほとんど発展がなかった一方で，**18** 世紀までに数学の世界はおおきな発展を遂げていた．さまざまな驚くべき “定理” が発見されて，厳密な記述や厳密な証明が問題になるようになってくる．

直線上の点は「互いに触れ合う **2** 片の境界」により確定される **(**アリストテレス**)**
$\rightsquigarrow$ 切断による実数の定義 **(Dedekind, 1872)**
$\rightsquigarrow$ 有理数のコーシー列による実数の定義 **(Cantor, 1883)**

　一方で，アリストテレス流の論理学は，数学で用いられる高度な推論を行うには不十分．

フレーゲによる論理学の刷新

1884年　『算術の基礎』
1893年　『算術の基本法則』第**1**巻
1903年　『算術の基本法則』第**2**巻

「論理に基づいてどこまで数学が展開できるのだろうか」

多くの革新的なアイデアで現代の論理学の基礎を構築

- 真理値**(**真と偽**)**の導入
- 関数と引数に分解した命題の導入
- 論理変数と量化子の導入
- 証明体系の導入

アリストテレス論理学を一般化

「すべての人は死ぬ.
ソクラテスは人である.
従って，ソクラテスは死ぬ.」

「$\forall x\ (P\ x \to Q\ x) \Rightarrow P\ a \Rightarrow Q\ a$」

当時の数学を展開できる論理の体系を与えたように見えたが，その体系には矛盾があることが判明(ラッセルのパラドックス).

アイデアも記法も非常に難解であったため，その仕事はなかなか知られることがなかった.

ゴットロープ· フレーゲ

(Gottlob Frege, 1848– 1925)

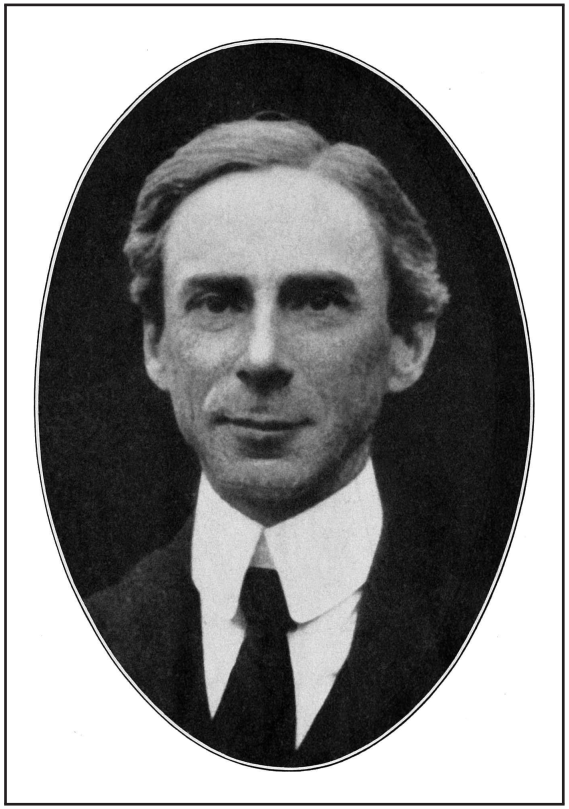
(画像はウィキペディアより引用)

ラッセルのパラドックス

"Hardly anything more unfortunate can befall a scientific writer than to have one of the foundations of his edifice shaken after the work is finished. This was the position I was placed in by a letter of Mr. Bertrand Russell, just when the printing of this volume was nearing its completion."

「学問的著作に携わるものにとって…，自らの仕事を完遂した後に，それが土台から揺るがされる事態に逢着することほど望まらしからぬことはない．この巻の印刷が終わろうとしていたそのときに，バートランド・ラッセル氏から送られてきた手紙によって私が立たされることになったのが，まさにそうした状況であった.」(フレーゲ『算術の基本法則』第2巻，あとがき)

バートランド・ラッセル



(Bertrand Russel, 1872-1970)

(画像はウィキペディアより引用)

ラッセルのパラドックス (集合論バージョン)

集合は対象の集まりですが，対象として集合そのものを考えてよい．

このとき，普通，集合そのものは，それ自体の要素にはなっていません．つまり，$X \in X$ は成立していません．けれども，集合全部の集合，などを考えると，集合全部の集合は集合ですから，それ自身の要素になっています．

今，Aとして自分自身を含まない集合を全部集めた集合をとります．つまり，Aというのは，$X \notin X$ が成立しているような X を集めた集合です．このとき，$A \in A$か考えてみます．$A \in A$とすると，集合 Aの定義から，$A \notin A$となっているはずで，これは矛盾ですから，$A \in A$は成立していません．一方，$A \notin A$とすると，集合 Aの定義から，Aは集合 Aに含まれるはずです．つまり，$A \in A$となってしまい，やはり矛盾なので，$A \notin A$も成立していません．従って，$A \in A$でも $A \notin A$でもないことになってしまいます (？)．

パラドックスの回避

自己言及的な構成を許すことが問題

型の理論 (theory of types)

(Bertrand Russel, 1903)

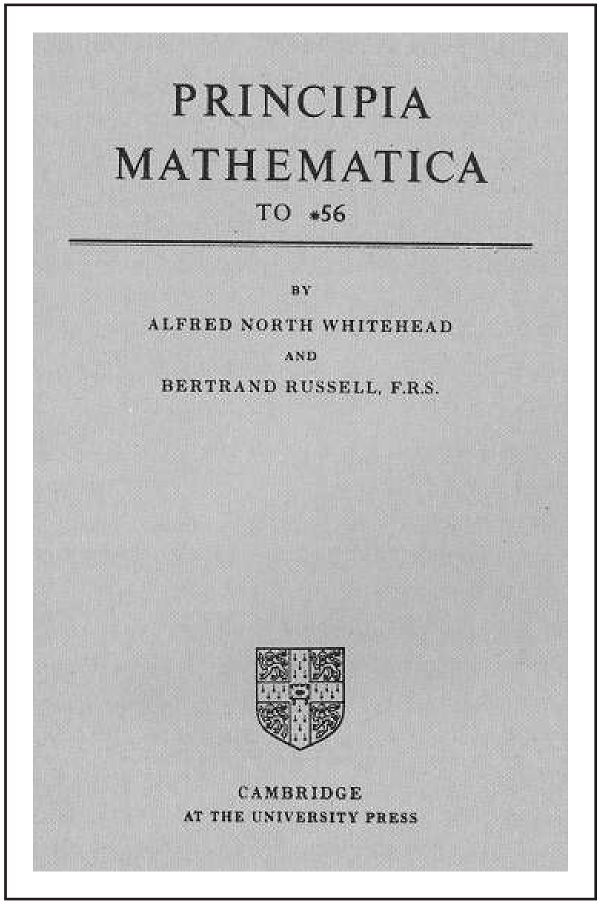
個体をタイプ **0** とする.
タイプ **0** の個体に対する述語をタイプ **1** とする.
タイプ **1** の述語に対する述語をタイプ **2** とする.
...

プリンキピア・マテマティカ

(Alfred North Whitehead and Bertrand Russell, 1910, 1912, and 1913)

「数学で発展させられた全てのアイデアと推論ステップを論理に基づいて厳密に再現しよう．」

フレーゲのアイデアと仕事がこれで知られるようになり，数学に大きなインパクトを与えることになった.



短縮版の表紙

(画像はウィキペディアより引用)

プリンキピアの証明体系(命題論理断片)

公理:

(1) $(P \vee P) \to P$
(2) $Q \to (P \vee Q)$
(3) $(P \vee Q) \to (Q \vee P)$
(4) $(P \vee (Q \vee R)) \to (Q \vee (P \vee R))$
(5) $(Q \to R) \to ((P \vee Q) \to (P \vee R))$

推論規則:

$$\frac{A \to B \quad\quad A}{B} \qquad \frac{A}{A\theta}$$ θ: 命題変数の具体化

"公理から推論規則を繰り返し使って得られるものだけが正しい命題"

ヒルベルトの計画

フレーゲ〜プリンキピア・マテマティカへの批判: 型の理論に基づくため，従来行われていたような数学の証明がしづらい.

1904:「論理学と算術の基礎」**(**国際数学者会議での講演**)**

集合論や自然数論を形式化し，その無矛盾性を証明すべき.

1. プリンキピアの公理から本当に矛盾が導かれないか?
2. 数学のどんな定理の証明にも十分な証明体系は?

第一階述語論理

『 数理論理学の基礎』**(Hilbert and Ackermann, 1928)** 第一階述語論理，第二階述語論理，**...**という形で，述語論理を見通しよく整理**.**

公理**:**

(1) $A \to (B \to A)$

(2) $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$

(3) $A \to (B \to (A \wedge B))$

(4) $A \wedge B \to A$

(4') $A \wedge B \to B$

(5) $A \to A \vee B$

(5') $B \to A \vee B$

(6) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

(7) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
(8) $\neg\neg A \to A$
(9) $A(t) \to \exists x A(x)$
(10) $\forall x A(x) \to A(t)$

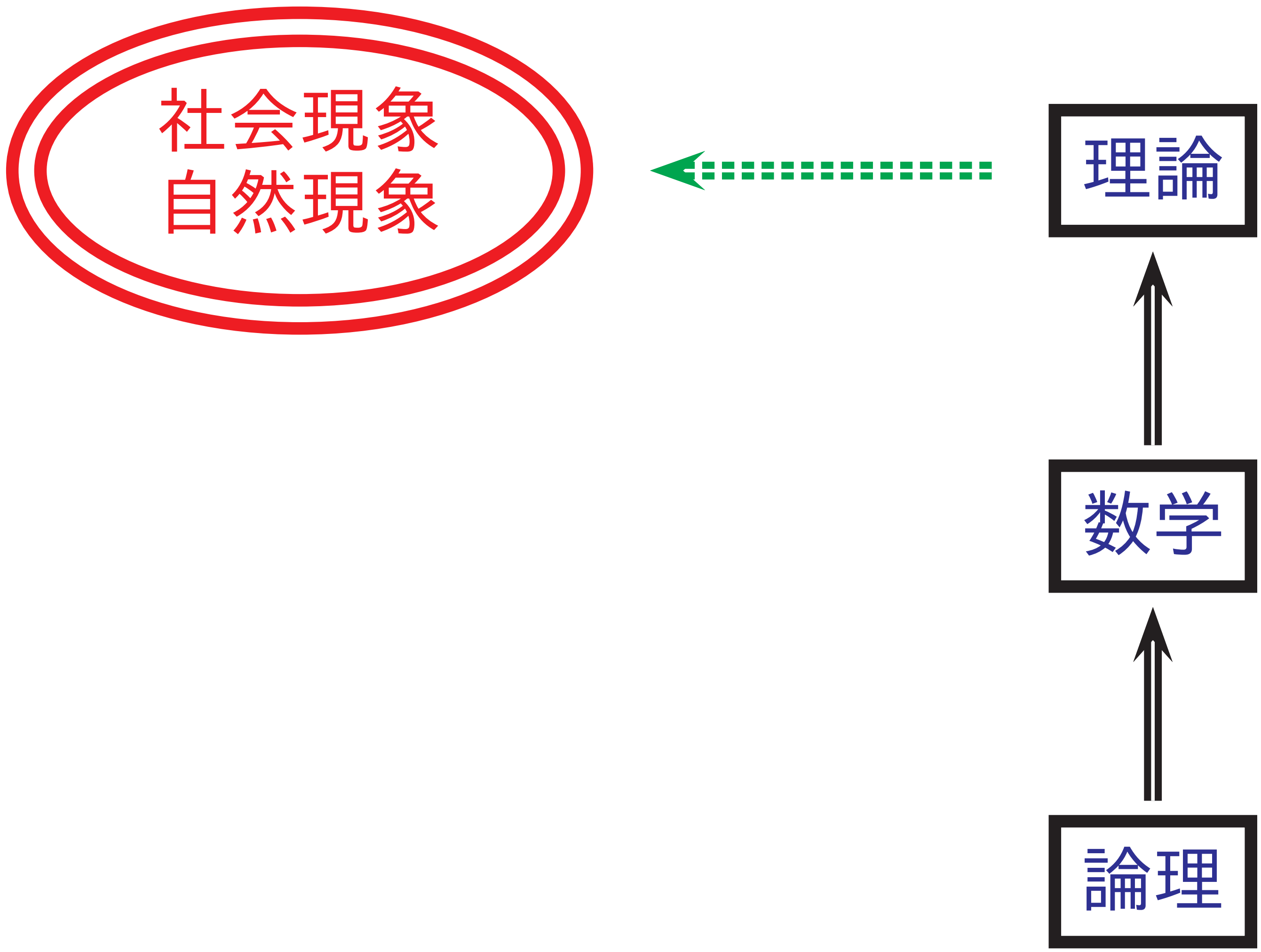
推論規則:

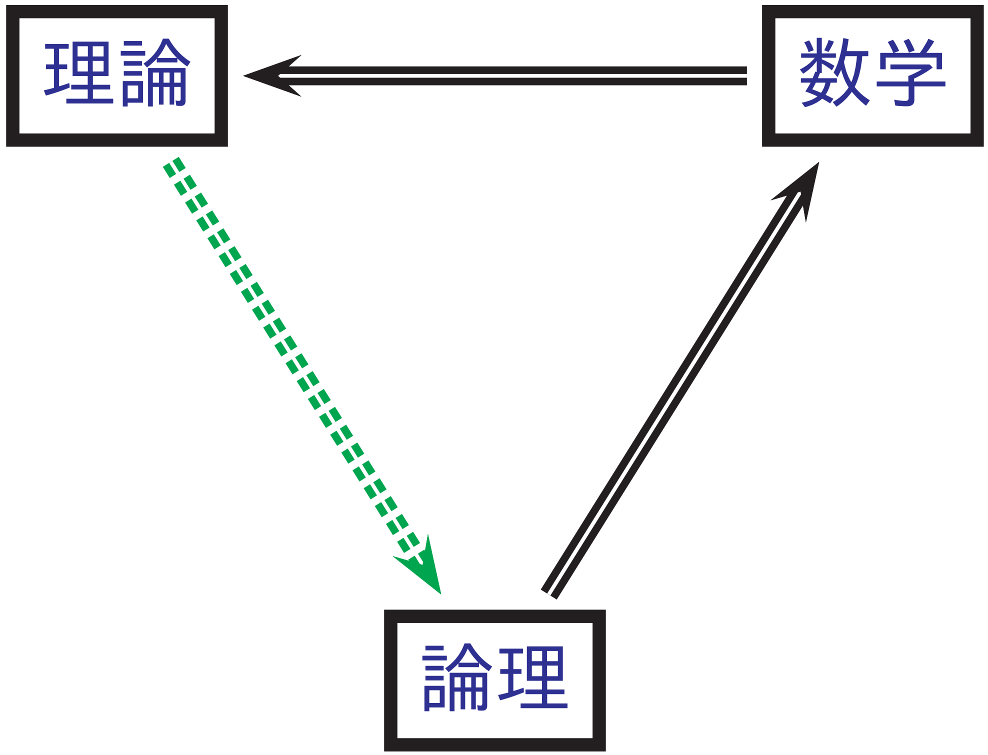
$$\frac{A \to B \quad A}{B} \qquad \frac{A(a) \to C}{\exists x A(x) \to C} \qquad \frac{C \to A(a)}{C \to \forall x A(x)}$$

ただし，a は C に出現しない.

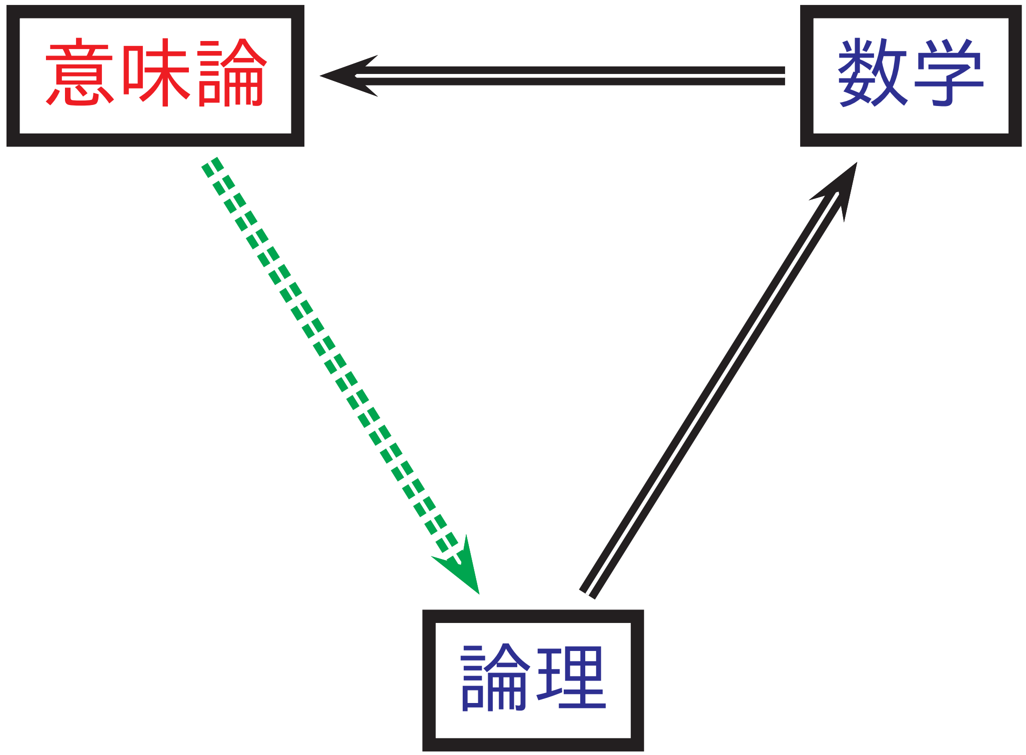
Hilbert の問題提起

- 証明体系の無矛盾問題. (どうやって体系から矛盾が導かれないということが示せるのか？)
- 証明体系の完全性問題. (正しい論理式は必ず証明体系をつかって示せるのだろうか？)


社会現象
自然現象
理論
数学
論理



数学の理論は，論理を対象とすることもできる．



数学の理論は，論理を対象とすることもできる．

意味論と構文論

意味論: 真理値表のアイデアを数学の概念を使って一般化.

「真な論理式とは，すべての数学的なモデル上で成り立つ論理式のことである.」

構文論: いろいろな推論形式が発明.

「真な論理式とは，論理的な推論に従って導かれる論理式のことである.」

<u>意味論と構文論における真の概念は等価なのか?</u>

「意味論と構文論は論理学の両輪」

第一階述語論理の完全性

ゲーデルの完全性定理 **(Kurt, Gödel, 1930)**

第一階述語論理の証明体系と意味論が対応する．

従って，第一階述語論理の証明体系は無矛盾．

ヒルベルトの計画のその後

「『プリンキピア・マテマティカ』やその関連体系での形式的に決定不可能な命題について，I」**(Kurt Gödel, 1931)**

ゲーデルの**(**第一**)**不完全性定理

ペアノ算術を含む再帰的な公理系は，無矛盾ならば，不完全である**.**

自然数の算術を含むような十分に強い体系では，体系の無矛盾性は示せない**.**

おわりに

歴史的には，論理学は，数学よりずっと遅れて発明され，数学の言葉であり，ルールである論理を，きちんと人類が理解するようになるまで，**2千年以上もの年月**が費されています．

この講義ではそのエッセンスを紹介します．