

2024年度 数理論理学 復習問題(10)

問題 1 (a) 自然数の集合 $\{0\}$ を対象とするとき, (b) 自然数の集合 $\{0, 1\}$ を対象とするとき, のそれぞれで, 次の述語論理式の真偽を答えよ.

(1) $\forall x (x \times x \approx 0)$

(2) $\exists x \exists y \neg(x \approx y)$

問題 2 (a) 自然数全体を対象とするとき, (b) 整数全体を対象とするとき, のそれぞれで, 次の述語論理式の真偽を答えよ.

(1) $\exists x \exists y (\neg(x \approx 0) \wedge (x + y \approx 0))$

(2) $\forall x \forall y (x \times x \approx y \times y \rightarrow x \approx y)$

問題 3 $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ かつ $B = \emptyset$, となることを, 述語論理式の同値変形を用いて説明せよ.

問題 4 以下の論理的同値性を同値変形を用いて示せ. (変形に用いた規則の名前も示すこと.)

(1) $\neg \forall x \neg \exists y P(x, y) \cong \exists y \exists x P(x, y)$

(2) $\neg \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \cong \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$

(3) $\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \cong \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

2024年度 数理論理学 復習問題解答 (10)

問題 1 (1)

(a) $0 \times 0 = 0$ だから、すべての要素 x について、 $x \times x \approx 0$ は真になっている。よって、真。

(b) 与えられた述語論理式が真となるには、0と1の両方について、 $x \times x \approx 0$ が真になる必要がある。しかし、 $1 \times 1 \approx 0$ は偽。すなわち、すべての要素 x について $x \times x \approx 0$ が真なわけではない。よって、偽。

(2) $\neg(x \approx y)$ が真 $\Leftrightarrow x \approx y$ が偽、であるから、 $x \approx y$ が偽となるような x, y があれば、論理式全体としては真となることに注意。

(a) 対象が $\{0\}$ なので、 $x = 0, y = 0$ としか値の取りようがないが、 $0 \approx 0$ は真。よって、 $x \approx y$ が偽となるような x, y は存在しない。よって、偽。

(b) $x = 0, y = 1$ (あるいは、 $x = 1, y = 0$) ととれば、 $x \approx y$ が偽、つまり、 $\neg(x \approx y)$ は真となる。よって、真となる。

問題 2 (1) $\neg(x \approx 0)$ と $x + y \approx 0$ の両方が真となるような x, y があれば真となる。

(a) x, y が自然数とすると、 $x + y \approx 0$ となるためには、 $x = y = 0$ となるしかないが、そのときは $\neg(x \approx 0)$ が偽となってしまう。よって、 $(\neg(x \approx 0) \wedge (x + y \approx 0))$ が真となるような自然数 x, y は存在しない。よって、偽。

(b) 整数を対象とする場合は、負の数があるので、例えば、 $x = -1, y = 1$ ととれば、 $\neg(x \approx 0)$ も $x + y \approx 0$ も真となる。よって、真。

(2) (a) 自然数上では負の数がないので、 $x^2 = y^2$ が真ならば、 $x = y$ が真となる。すなわち、どのような x, y をとっても、 $(x \times x \approx y \times y \rightarrow x \approx y)$ は真。よって、真。

(b) 整数上では、例えば、 $x = -1, y = 1$ ととれば、 $x^2 = y^2$ は真となるが、 $x = y$ は偽。よって、すべての x, y について $(x \times x \approx y \times y \rightarrow x \approx y)$ が真となるわけではない。よって、偽。

問題 3 集合 C が空集合であることは $\neg \exists x (x \in C)$ 、また、集合 $x \in A \cup B$ は、 $(x \in A) \vee (x \in B)$ で表現されることから、 $A \cup B = \emptyset$ は、

$$\neg \exists x (x \in A \vee x \in B) \quad (1)$$

と表現される。一方、 $A = \emptyset$ かつ $B = \emptyset$ は、

$$\neg \exists x (x \in A) \wedge \neg \exists x (x \in B) \quad (2)$$

と表現される。述語論理式 (1), (2) は以下の同値変形により論理的に同値:

$$\begin{aligned} \neg \exists x (x \in A \vee x \in B) &\cong \neg (\exists x (x \in A) \vee \exists x (x \in B)) \quad (\text{存在の分配}) \\ &\cong \neg \exists x (x \in A) \wedge \neg \exists x (x \in B) \quad (\text{ド・モルガンの法則}) \end{aligned}$$

問題 4 (1)

$$\begin{aligned} \neg \forall x \neg \exists y P(x, y) &\cong \exists x \neg \neg \exists y P(x, y) \quad (\text{ド・モルガンの法則}) \\ &\cong \exists x \exists y P(x, y) \quad (\text{二重否定}) \\ &\cong \exists y \exists x P(x, y) \quad (\text{束縛の交換}) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\neg \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) &\cong \exists x \neg (P(x) \rightarrow Q(x)) && \text{(ド・モルガンの法則)} \\ &\cong \exists x \neg (\neg P(x) \vee Q(x)) && \text{(含意の法則)} \\ &\cong \exists x (\neg \neg P(x) \wedge \neg Q(x)) && \text{(ド・モルガンの法則)} \\ &\cong \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)) && \text{(二重否定)}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) &\cong \exists x (\neg P(x) \vee Q(x)) && \text{(含意の法則)} \\ &\cong \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) && \text{(存在の分配)} \\ &\cong \neg \forall x P(x) \vee \exists x Q(x) && \text{(ド・モルガンの法則)} \\ &\cong \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) && \text{(含意の法則)}\end{aligned}$$