

2024 年度 数理論理学 復習問題 (3)

問題 1 付値 v_0 を

$$v_0(P_i) = \begin{cases} T & (i \text{ が偶数のとき}) \\ F & (i \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

により定めるとき, 以下の値を (a) 解釈の定義による直接的な計算方法, (b) ブール関数を用いた式変形による計算方法, の 2 通りの方法で計算せよ.

- (1) $\llbracket \neg(P_6 \rightarrow P_4) \rrbracket_{v_0}$
- (2) $\llbracket P_6 \wedge \neg P_3 \rightarrow \neg P_1 \rrbracket_{v_0}$

問題 2 v を任意の付値とすると, $\llbracket P \wedge \neg P \rrbracket_v$ の値を (真理値表ではなく) 解釈の定義を使って求めよ.

問題 3 命題論理式 $\neg(P_1 \vee P_2)$ について以下の問いに答えよ. 真理値表を使わずに解くこと.

- (1) この命題論理式がトートロジーでない場合には, 反例を 1 つ与えよ.
- (2) この命題論理式が充足可能である場合には, モデルを 1 つ与えよ.

問題 4 $P \rightarrow Q \rightarrow P \wedge Q$ がトートロジーであることを (真理値表を使わず) 解釈の定義を用いて示せ.

問題 5 $\neg(\neg P \rightarrow P)$ は充足可能であることを (真理値表を使わず) 解釈の定義を使って示せ.

問題 6 $\llbracket P \vee Q \rrbracket_v = F$ となるとき, $\llbracket P \wedge Q \rrbracket_v$ の値を (真理値表を使わず) 解釈の定義に従って示せ.

問題 7 $\llbracket P \wedge Q \rrbracket_v = T$, $\llbracket P \rightarrow R \rrbracket_v = F$ となるとき, $\llbracket Q \rightarrow R \rrbracket_v$ の値を (真理値表を使わず) 解釈の定義に従って示せ.

問題 8 $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = \llbracket P \wedge R \rrbracket_v = F$ となるとき, $\llbracket Q \vee R \rrbracket_v$ の値を (真理値表を使わず) 解釈の定義に従って示せ.

問題 9 $\llbracket P \wedge Q \rrbracket_v = \llbracket R \wedge \neg Q \rrbracket_v = F$ となるとき, $\llbracket P \wedge R \rrbracket_v$ の値を (真理値表を使わず) 解釈の定義に従って示せ.

問題 10 $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = \llbracket Q \rightarrow R \rrbracket_v$ となるとき, $\llbracket P \rightarrow R \rrbracket_v$ の値を (真理値表を使わず) 解釈の定義に従って示せ.

2024年度 数理論理学 復習問題解答 (3)

問題 1

(a) 解釈の定義による直接的な計算法.

(1)

$\llbracket P_6 \rrbracket_{v_0} = \llbracket P_4 \rrbracket_{v_0} = T$ より, $\llbracket P_6 \rightarrow P_4 \rrbracket_{v_0} = T$. よって, $\llbracket \neg(P_6 \rightarrow P_4) \rrbracket_{v_0} = F$

(2)

$\llbracket P_3 \rrbracket_{v_0} = F$ より, $\llbracket \neg P_3 \rrbracket_{v_0} = T$. よって, $\llbracket P_6 \rrbracket_{v_0} = T$ より, $\llbracket P_6 \wedge \neg P_3 \rrbracket_{v_0} = T$. 一方, $\llbracket P_1 \rrbracket_{v_0} = F$ より, $\llbracket \neg P_1 \rrbracket_{v_0} = T$. 以上より, $\llbracket P_6 \wedge \neg P_3 \rightarrow \neg P_1 \rrbracket_{v_0} = T$.

(b) ブール関数を用いた式変形による計算法.

(1)

$$\begin{aligned}\llbracket \neg(P_6 \rightarrow P_4) \rrbracket_{v_0} &= \text{not}(\llbracket P_6 \rightarrow P_4 \rrbracket_{v_0}) \\ &= \text{not}(\text{imp}(\llbracket P_6 \rrbracket_{v_0}, \llbracket P_4 \rrbracket_{v_0})) \\ &= \text{not}(\text{imp}(T, T)) \\ &= \text{not}(T) \\ &= F\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\llbracket P_6 \wedge \neg P_3 \rightarrow \neg P_1 \rrbracket_{v_0} &= \text{imp}(\llbracket P_6 \wedge \neg P_3 \rrbracket_{v_0}, \llbracket \neg P_1 \rrbracket_{v_0}) \\ &= \text{imp}(\text{and}(\llbracket P_6 \rrbracket_{v_0}, \llbracket \neg P_3 \rrbracket_{v_0}), \llbracket \neg P_1 \rrbracket_{v_0}) \\ &= \text{imp}(\text{and}(\llbracket P_6 \rrbracket_{v_0}, \text{not}(\llbracket P_3 \rrbracket_{v_0})), \text{not}(\llbracket P_1 \rrbracket_{v_0})) \\ &= \text{imp}(\text{and}(T, \text{not}(F))\text{not}(F)) \\ &= \text{imp}(\text{and}(T, T), \text{not}(F)) \\ &= \text{imp}(T, T) \\ &= T\end{aligned}$$

問題 2 $v(P)$ の値によって場合分けする. $v(P) = T$ の場合. このとき, 解釈の定義より, $\llbracket \neg P \rrbracket_v = F$. よって, 解釈の定義より, $\llbracket P \wedge \neg P \rrbracket_v = F$ となる. $v(P) = F$ の場合. このとき, 解釈の定義より, $\llbracket \neg P \rrbracket_v = T$. よって, 解釈の定義より, $\llbracket P \wedge \neg P \rrbracket_v = F$ となる. よって, いずれの場合でも, $\llbracket P \wedge \neg P \rrbracket_v = F$ となる.

問題 3 $A = \neg(P_1 \vee P_2)$ とおく. (1) 付値 v が A の反例となるためには, $\llbracket \neg(P_1 \vee P_2) \rrbracket_v = F$ となればよい. このためには, $\llbracket P_1 \vee P_2 \rrbracket_v = T$, つまり, $\llbracket P_1 \rrbracket_v = T$ または $\llbracket P_2 \rrbracket_v = T$ が成立すればよい.

解答例: $v(P_i) = T$ ($i \geq 0$) により与えられる付値 v . ($v(P_1) = T$ または $v(P_2) = T$ が成立している付値なら良い.)

(2) 付値 v が A のモデルとなるためには, $\llbracket \neg(P_1 \vee P_2) \rrbracket_v = T$ となればよい. このためには, $\llbracket P_1 \vee P_2 \rrbracket_v = F$, つまり, $\llbracket P_1 \rrbracket_v = F$ かつ $\llbracket P_2 \rrbracket_v = F$ が成立すればよい.

解答例: $v(P_i) = F$ ($i \geq 0$) により与えられる付値 v . ($v(P_1) = v(P_2) = F$ が成立している付値ならよい.)

問題 4 $A = P \rightarrow Q \rightarrow P \wedge Q$ とおく. 任意の付値 v について, $\llbracket A \rrbracket_v = T$ となることを示す.

$v(P) = F$ ならば, 解釈の定義より, $\llbracket A \rrbracket_v = T$ が成立. よって, 以下では $v(P) = T$

の場合を考える． $v(Q) = F$ ならば，解釈の定義より， $\llbracket Q \rightarrow P \wedge Q \rrbracket_v = T$ が成立．よって， $\llbracket A \rrbracket_v = T$ となる．従って， $v(P) = v(Q) = T$ の場合を考えればよい．このとき，解釈の定義より， $\llbracket P \wedge Q \rrbracket_v = T$ が成立．よって， $\llbracket Q \rightarrow P \wedge Q \rrbracket_v = T$ ．従って， $\llbracket A \rrbracket_v = T$ となる．

問題 5 $v(P) = F$ となる解釈 v を考える．このとき， $\llbracket P \rrbracket_v = F$ ， $\llbracket \neg P \rrbracket_v = T$ ．よって， $\llbracket \neg P \rightarrow P \rrbracket_v = F$ ．従って， $\llbracket \neg(\neg P \rightarrow P) \rrbracket_v = T$ ．よって， $\neg(\neg P \rightarrow P)$ は充足可能．

問題 6 $\llbracket P \vee Q \rrbracket_v = F$ より， $v(P) = v(Q) = F$ となる．よって， $\llbracket P \wedge Q \rrbracket_v = F$ ．

問題 7 $\llbracket P \wedge Q \rrbracket_v = T$ より $v(P) = v(Q) = T$ ． $\llbracket P \rightarrow R \rrbracket_v = F$ より， $v(P) = T$ ， $v(R) = F$ ．よって， $\llbracket Q \rightarrow R \rrbracket_v = F$ ．

問題 8 $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = F$ より， $v(P) = T$ かつ $v(Q) = F$ ．また， $\llbracket P \wedge R \rrbracket_v = F$ なので， $v(P) = T$ より， $v(R) = F$ が導かれる．よって， $v(Q) = v(R) = F$ より， $\llbracket Q \vee R \rrbracket_v = F$ ．

問題 9 $v(Q)$ の値で場合分けして考える．(i) $v(Q) = T$ の場合． $\llbracket P \wedge Q \rrbracket_v = F$ より， $v(P) = F$ ．よって， $\llbracket P \wedge R \rrbracket_v = F$ ．(ii) $v(Q) = F$ の場合．このとき， $\llbracket \neg Q \rrbracket_v = T$ なので， $\llbracket R \wedge (\neg Q) \rrbracket_v = F$ より， $v(R) = F$ ．よって， $\llbracket P \wedge R \rrbracket_v = F$ ．よって， $v(Q)$ の値によらず， $\llbracket P \wedge R \rrbracket_v = F$ となる．

問題 10 (解答例 1) $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = \llbracket Q \rightarrow R \rrbracket_v = F$ とすると， $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = F$ より $v(Q) = F$ が得られるが，このとき $\llbracket Q \rightarrow R \rrbracket_v = T$ となるので矛盾．よって， $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = \llbracket Q \rightarrow R \rrbracket_v = T$ ． $v(P) = F$ のときは，解釈の定義より $\llbracket P \rightarrow R \rrbracket_v = T$ が成立． $v(P) = T$ のときは， $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = T$ より $v(Q) = T$ となり，従って， $\llbracket Q \rightarrow R \rrbracket_v = T$ より $v(R) = T$ ．よって，いずれの場合も $\llbracket P \rightarrow R \rrbracket_v = T$ となる．

(解答例 2) $\llbracket P \rightarrow R \rrbracket_v = F$ とする．このとき，解釈の定義より， $v(P) = T$ かつ $v(R) = F$ ．よって， $v(Q) = T$ とすると， $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = T \neq F = \llbracket Q \rightarrow R \rrbracket_v$ となり，仮定 $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = \llbracket Q \rightarrow R \rrbracket_v$ に矛盾．また， $v(Q) = F$ としても， $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = F \neq T = \llbracket Q \rightarrow R \rrbracket_v$ となり，仮定 $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = \llbracket Q \rightarrow R \rrbracket_v$ に矛盾．よって， $\llbracket P \rightarrow R \rrbracket_v = T$ ．

(解答例 3) $v(Q) = T$ の場合．解釈の定義より $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = T$ となるので，仮定 $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = \llbracket Q \rightarrow R \rrbracket_v$ より， $\llbracket Q \rightarrow R \rrbracket_v = T$ ．よって， $v(R) = T$ ．従って， $\llbracket P \rightarrow R \rrbracket_v = T$ となる． $v(Q) = F$ の場合．解釈の定義より $\llbracket Q \rightarrow R \rrbracket_v = T$ となるので，仮定 $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = \llbracket Q \rightarrow R \rrbracket_v$ より， $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = T$ ．よって， $v(P) = F$ ．従って， $\llbracket P \rightarrow R \rrbracket_v = T$ となる．