

2024 年度 数理論理学 復習問題 (8)

問題 1 任意の命題論理式 A について, $d(A) \geq 0$ となることを帰納法を用いて証明せよ. ただし, $d(A)$ は, 講義資料中で与えたように, 命題論理式 A の深さを表わすものとする.

問題 2 命題変数/定数の個数 $l(A)$ を以下のように定義する.

$$l(A) = \begin{cases} 1 & (A \text{ が命題変数, または } A \in \{\top, \perp\} \text{ のとき}) \\ l(B) & (A = \neg B \text{ のとき}) \\ l(B) + l(C) & (A = B \wedge C, \text{ または } A = B \vee C, A = B \rightarrow C, \\ & A = B \leftrightarrow C \text{ のとき}) \end{cases}$$

また, 2 項命題結合子の個数 $b(A)$ を以下のように定義する.

$$b(A) = \begin{cases} 0 & (A \text{ が命題変数, または } A \in \{\top, \perp\} \text{ のとき}) \\ b(B) & (A = \neg B \text{ のとき}) \\ b(B) + b(C) + 1 & (A = B \wedge C, \text{ または } A = B \vee C, A = B \rightarrow C, \\ & A = B \leftrightarrow C \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の命題論理式 A について, $l(A) = b(A) + 1$ が成立することを示せ.

問題 3 命題論理式の変換 t を以下のように定義する.

$$\begin{array}{ll} t(P) &= \neg P & t(B \wedge C) &= t(B) \vee t(C) \\ t(\perp) &= \top & t(B \vee C) &= t(B) \wedge t(C) \\ t(\top) &= \perp & t(B \rightarrow C) &= t(C) \rightarrow t(B) \\ t(\neg B) &= \neg t(B) & t(B \leftrightarrow C) &= t(B) \leftrightarrow t(C) \end{array}$$

ただし, ここで, P は命題変数を表わすとする. このとき,

(1) $t(P \wedge Q)$, $t(t(P \wedge Q))$ を求めよ.

(2) 任意の命題論理式 A について $t(t(A)) \cong A$ となることを, 命題論理式 A に関する帰納法を用いて証明せよ.

問題 4 $|\text{Sub}(A)| \leq 2c(A) + 1$, つまり, 命題論理式 A の部分論理式の個数は高々 $2c(A) + 1$ 個となることを示せ.

問題 5 v を付値とすると, 命題論理式の変換 t_v を以下のように定義する.

$$t_v(A) = \begin{cases} \top & (A \text{ が命題変数, } v(A) = \top \text{ のとき}) \\ \perp & (A \text{ が命題変数, } v(A) = \text{F のとき}) \\ A & (A \in \{\perp, \top\} \text{ のとき}) \\ \neg t_v(B) & (A = \neg B \text{ のとき}) \\ t_v(B) \circ t_v(C) & (A = B \circ C, \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) 付値 v_0 を

$$v_0(P_i) = \begin{cases} \top & (i \text{ が偶数のとき}) \\ \text{F} & (i \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

により定義する. このとき, $t_{v_0}((\neg P_0) \rightarrow P_1)$ を求めよ.

(2) 任意の命題論理式 A について, $\llbracket A \rrbracket_v = \top$ ならば $t_v(A) \cong \top$, $\llbracket A \rrbracket_v = \text{F}$ ならば $t_v(A) \cong \perp$ となることを命題論理式 A に関する帰納法を用いて証明せよ.

2024 年度 数理論理学 復習問題解答 (8)

問題 1 命題論理式 A に関する帰納法で示す.

1. A が命題変数のとき.

$d(A)$ の定義から, $d(A) = 0$. よって, $d(A) \geq 0$.

2. $A = \top$ または $A = \perp$ のとき.

$d(A)$ の定義から, $d(A) = 0$. よって, $d(A) \geq 0$.

3. $A = \neg B$ のとき.

$d(A)$ の定義から, $d(A) = d(B) + 1$.

帰納法の仮定より, $d(B) \geq 0$.

よって, $d(A) \geq 0$.

4. $A = B \wedge C$ または $A = B \vee C$, $A = B \rightarrow C$, $A = B \leftrightarrow C$ のとき.

$d(A)$ の定義から, $d(A) = \max\{d(B), d(C)\} + 1$.

帰納法の仮定より, $d(B) \geq 0$.

よって, $d(A) \geq 0$. □

問題 2 命題論理式 A に関する帰納法で示す.

1. A が命題変数, または, $A = \top$, $A = \perp$ のとき.

定義から, $l(A) = 1$, $b(A) = 0$. よって, $l(A) = 1 = b(A) + 1$.

2. $A = \neg B$ のとき.

$l(A)$ の定義から, $l(A) = l(B)$.

$b(A)$ の定義から, $b(A) = b(B)$.

帰納法の仮定より, $l(B) = b(B) + 1$.

よって, $l(A) = b(A) + 1$.

4. $A = B \wedge C$ または $A = B \vee C$, $A = B \rightarrow C$, $A = B \leftrightarrow C$ のとき.

$l(A)$ の定義から, $l(A) = l(B) + l(C)$.

$b(A)$ の定義から, $b(A) = b(B) + b(C) + 1$.

帰納法の仮定より, $l(B) = b(B) + 1$, $l(C) = b(C) + 1$.

よって, $l(A) = l(B) + l(C) = (b(B) + 1) + (b(C) + 1) = (b(B) + b(C) + 1) + 1 = b(A) + 1$. □

問題 3 (1) $t((P \wedge Q)) = t(P) \vee t(Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$

$t(t((P \wedge Q))) = t((\neg P) \vee (\neg Q)) = t(\neg P) \wedge t(\neg Q) = \neg(\neg P) \wedge \neg(\neg Q)$

(2) 命題論理式 A に関する帰納法で示す.

1. A が命題変数の場合.

$t(t(A)) = \neg\neg A \cong A$ より 成立.

2. $A = \perp$ の場合.

$t(t(A)) = t(\top) \cong \perp \cong A$ より 成立.

3. $A = \top$ の場合.

$t(t(A)) = t(\perp) \cong \top \cong A$ より 成立.

4. $A = \neg B$ の場合.

帰納法の仮定から, $t(t(B)) \cong B$.

よって, $t(t(A)) = t(t(\neg B)) = t(\neg t(B)) = \neg t(B) \cong \neg B = A$.

5. $A = B \wedge C$ の場合.

帰納法の仮定から, $t(t(B)) \cong B$, $t(t(C)) \cong C$.

よって, $t(t(A)) = t(t(B) \wedge t(C)) = t(t(B)) \wedge t(t(C)) \cong B \wedge C = A$ より 成立.

6. $A = B \vee C$ の場合.

帰納法の仮定から, $t(t(B)) \cong B$, $t(t(C)) \cong C$.

よって, $t(t(A)) = t(t(B) \vee t(C)) = t(t(B)) \vee t(t(C)) \cong B \vee C = A$ より 成立.

7. $A = B \rightarrow C$ の場合.

帰納法の仮定から, $t(t(B)) \cong B$, $t(t(C)) \cong C$.

よって, $t(t(A)) = t(t(B) \rightarrow t(C)) = t(t(B)) \rightarrow t(t(C)) \cong B \rightarrow C = A$ より 成立.

8. $A = B \leftrightarrow C$ の場合.

帰納法の仮定から, $t(t(B)) \cong B$, $t(t(C)) \cong C$.

よって, $t(t(A)) = t(t(B) \leftrightarrow t(C)) = t(t(B)) \leftrightarrow t(t(C)) \cong B \leftrightarrow C = A$ より 成立.

□

問題 4 命題論理式 A に関する帰納法により証明を行う. 以下では A の部分論理式の個数を $s(A)$ とおく.

1. A が命題変数のとき.

このとき $\text{Sub}(A) = \{A\}$ より $s(A) = 1$. 一方, $c(A) = 0$ より, $2c(A) + 1 = 1$. ゆえに, $s(A) \leq 2c(A) + 1$.

2. $A = \top$ または $A = \perp$ のとき.

このとき $\text{Sub}(A) = \{A\}$ より $s(A) = 1$. 一方, $c(A) = 1$ より, $2c(A) + 1 = 3$. ゆえに, $s(A) \leq 2c(A) + 1$.

3. $A = \neg B$ のとき.

このとき $\text{Sub}(A) = \text{Sub}(B) \cup \{A\}$. よって, $s(A) \leq s(B) + 1$. 帰納法の仮定より $s(B) \leq 2c(B) + 1$. ゆえに, $s(A) \leq s(B) + 1 \leq 2c(B) + 2 = 2(c(B) + 1) = 2c(A) \leq 2c(A) + 1$.

4. $A = B \wedge C$, または, $A = B \vee C$, $A = B \rightarrow C$, $A = B \leftrightarrow C$ のとき.

このとき $\text{Sub}(A) = \text{Sub}(B) \cup \text{Sub}(C) \cup \{A\}$. よって, $s(A) \leq s(B) + s(C) + 1$. 帰納法の仮定より $s(B) \leq 2c(B) + 1$, $s(C) \leq 2c(C) + 1$. $s(A) \leq s(B) + s(C) + 1 \leq (2c(B) + 1) + (2c(C) + 1) + 1 \leq 2(c(B) + c(C) + 1) + 1 \leq 2c(A) + 1$. □

問題 5 (1)

$$\begin{aligned} t_{v_0}((\neg P_0) \rightarrow P_1) &= t_{v_0}(\neg P_0) \rightarrow t_{v_0}(P_1) \\ &= \neg(t_{v_0}(P_0)) \rightarrow t_{v_0}(P_1) \\ &= \neg \top \rightarrow \perp \end{aligned}$$

(2) (i) $\llbracket A \rrbracket_v = \top$ ならば $t_v(A) \cong \top$, (ii) $\llbracket A \rrbracket_v = \text{F}$ ならば $t_v(A) \cong \perp$ となることを命題論理式 A に関する帰納法を用いて示す.

1. A が命題変数の場合. (i) $\llbracket A \rrbracket_v = \top$ と仮定する. すると, 解釈の定義より $v(A) = \top$. よって, t_v の定義より, $t_v(A) = \top$. 従って, $t_v(A) \cong \top$ が成立する. (ii) $\llbracket A \rrbracket_v = \text{F}$ と仮定する. すると, 解釈の定義より $v(A) = \text{F}$. よって, t_v の定義より, $t_v(A) = \perp$. 従って, $t_v(A) \cong \perp$ が成立する.

2. $A = \top$ の場合. t_v の定義より, $t_v(A) = \top$. よって, $t_v(A) \cong \top$ なので, (i) が成立. 一方, $\llbracket \top \rrbracket_v = \top$ より, (ii) の前提部分は成立しないので, (ii) も成立する.
3. $A = \perp$ の場合. t_v の定義より, $t_v(A) = \perp$. よって, $t_v(A) \cong \perp$ なので, (ii) が成立. 一方, $\llbracket \perp \rrbracket_v = \text{F}$ より, (i) の前提部分は成立しないので, (i) も成立する.
4. $A = \neg B$ の場合. (i) $\llbracket \neg B \rrbracket_v = \top$ と仮定する. このとき, 解釈の定義より $\llbracket B \rrbracket_v = \text{F}$. ゆえに, 帰納法の仮定より, $t_v(B) \cong \perp$. 従って, $t_v(\neg B) = \neg t_v(B) \cong \neg \perp \cong \top$. (ii) $\llbracket \neg B \rrbracket_v = \text{F}$ と仮定する. このとき, 解釈の定義より $\llbracket B \rrbracket_v = \top$. ゆえに, 帰納法の仮定より, $t_v(B) \cong \top$. 従って, $t_v(\neg B) = \neg t_v(B) \cong \neg \top \cong \perp$.
5. $A = B \wedge C$ の場合. (i) $\llbracket B \wedge C \rrbracket_v = \top$ と仮定する. このとき, 解釈の定義より $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \top$. ゆえに, 帰納法の仮定より, $t_v(B) \cong \top$ かつ $t_v(C) \cong \top$. 従って, $t_v(B \wedge C) = t_v(B) \wedge t_v(C) \cong \top \wedge \top \cong \top$. (ii) $\llbracket B \wedge C \rrbracket_v = \text{F}$ と仮定する. このとき, 解釈の定義より $\llbracket B \rrbracket_v = \text{F}$ または $\llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$. $\llbracket B \rrbracket_v = \text{F}$ の場合は, 帰納法の仮定より $t_v(B) \cong \perp$ となり, $t_v(B \wedge C) = t_v(B) \wedge t_v(C) \cong \perp \wedge t_v(C) \cong \perp$. $\llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$ の場合も, 帰納法の仮定より $t_v(C) \cong \perp$ となり, $t_v(B \wedge C) = t_v(B) \wedge t_v(C) \cong t_v(B) \wedge \perp \cong \perp$ となる.
6. $A = B \vee C$ の場合. (i) $\llbracket B \vee C \rrbracket_v = \top$ と仮定する. このとき, 解釈の定義より $\llbracket B \rrbracket_v = \top$ または $\llbracket C \rrbracket_v = \top$. $\llbracket B \rrbracket_v = \top$ の場合は, 帰納法の仮定より $t_v(B) \cong \top$ となり, $t_v(B \vee C) = t_v(B) \vee t_v(C) \cong \top \vee t_v(C) \cong \top$. $\llbracket C \rrbracket_v = \top$ の場合も, 帰納法の仮定より $t_v(C) \cong \top$ となり, $t_v(B \vee C) = t_v(B) \vee t_v(C) \cong t_v(B) \vee \top \cong \top$ となる. (ii) $\llbracket B \vee C \rrbracket_v = \text{F}$ と仮定する. このとき, 解釈の定義より $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$. ゆえに, 帰納法の仮定より, $t_v(B) \cong \perp$ かつ $t_v(C) \cong \perp$. 従って, $t_v(B \vee C) = t_v(B) \vee t_v(C) \cong \perp \vee \perp \cong \perp$.
7. $A = B \rightarrow C$ の場合. (i) $\llbracket B \rightarrow C \rrbracket_v = \top$ と仮定する. このとき, 解釈の定義より $\llbracket B \rrbracket_v = \text{F}$ または $\llbracket C \rrbracket_v = \top$. $\llbracket B \rrbracket_v = \text{F}$ の場合は, 帰納法の仮定より $t_v(B) \cong \perp$ となり, $t_v(B \rightarrow C) = t_v(B) \rightarrow t_v(C) \cong \perp \rightarrow t_v(C) \cong \top$. $\llbracket C \rrbracket_v = \top$ の場合も, 帰納法の仮定より $t_v(C) \cong \top$ となり, $t_v(B \rightarrow C) = t_v(B) \rightarrow t_v(C) \cong t_v(B) \rightarrow \top \cong \top$ となる. (ii) $\llbracket B \rightarrow C \rrbracket_v = \text{F}$ と仮定する. このとき, 解釈の定義より $\llbracket B \rrbracket_v = \top$ かつ $\llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$. ゆえに, 帰納法の仮定より, $t_v(B) \cong \top$ かつ $t_v(C) \cong \perp$. 従って, $t_v(B \rightarrow C) = t_v(B) \rightarrow t_v(C) \cong \top \rightarrow \perp \cong \perp$.
8. $A = B \leftrightarrow C$ の場合. (i) $\llbracket B \leftrightarrow C \rrbracket_v = \top$ と仮定する. このとき, 解釈の定義より $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \top$ または $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$. $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \top$ の場合は, 帰納法の仮定より, $t_v(B) \cong \top$, $t_v(C) \cong \top$ となり, $t_v(B \leftrightarrow C) = t_v(B) \leftrightarrow t_v(C) \cong \top \leftrightarrow \top \cong \top$. $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$ の場合も, 帰納法の仮定より, $t_v(B) \cong \perp$, $t_v(C) \cong \perp$ となり, $t_v(B \leftrightarrow C) = t_v(B) \leftrightarrow t_v(C) \cong \perp \leftrightarrow \perp \cong \top$. (ii) $\llbracket B \leftrightarrow C \rrbracket_v = \text{F}$ と仮定する. このとき, 解釈の定義より (a) $\llbracket B \rrbracket_v = \top$ かつ $\llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$, または, (b) $\llbracket B \rrbracket_v = \text{F}$ かつ $\llbracket C \rrbracket_v = \top$. (a) の場合, 帰納法の

仮定より, $t_v(B) \cong \top$, $t_v(C) \cong \perp$ となり, $t_v(B \leftrightarrow C) = t_v(B) \leftrightarrow t_v(C) \cong \top \leftrightarrow \perp \cong \perp$. (b) の場合も, 帰納法の仮定より, $t_v(B) \cong \perp$, $t_v(C) \cong \top$ となるから, $t_v(B \leftrightarrow C) = t_v(B) \leftrightarrow t_v(C) \cong \perp \leftrightarrow \top \cong \perp$. $\square$

注意. 2つの性質 (i) と (ii) を別々に帰納法で示そうとすると, 帰納法の仮定だけでは命題が導けないので, うまくいかない. (このような状況をさして, 「帰納法がかからない」という.)

このように複数の性質を同時に示すことや, もともとも証明したい命題より一般的な命題を示すことが, 帰納法による証明がうまくいく鍵となる場合がよくある.