2024年度 数理論理学

講義資料(8)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

- 帰納的定義
- (構造) 帰納法
- 帰納法による証明

(構造)帰納法

帰納的に定義された対象を示すときによく使われる証明手法の1つとして，**(構造)帰納法**がある．帰納法は，直接/間接的に論理学と関係し，論理学においてもコンピュータサイエンス全般においても非常に重要.

この資料では，特に，帰納的定義，そして，構造帰納法について，命題論理式を題材にして学習する.

命題論理の言語

はじめに，「命題論理式が帰納的に定義されている」ことについて説明する.

用いられる個々の記号を言語とよぶ.
命題論理の言語として次の**3**種類の記号を用いる.

命題変数: $\mathtt{P}_0$,$\mathtt{P}_1$, $\mathtt{P}_2$,$\ldots$
命題結合子: $\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$,$\top$,$\perp$
その他: $($,$)$

青字が対象記号，黒字はメタ記号．(開・閉) 括弧も言語に含まれることに注意． $\mathtt{P}_1$ では，$\mathtt{P}$ と $_1$ がそれぞれ独立の記号ではなく，$\mathtt{P}_1$ で **1** つの記号と見做していることに注意．通常，命題変数は (可算) 無限個あるとする.

命題論理式の定義

次の規則に従って約束される記号の列が，命題論理の言葉や言明にあたる．これを命題論理式とよぶ.

(規則1.) Pを命題変数とするとき，Pは命題論理式である.

(規則2.) $\top$および$\perp$は命題論理式である.

(規則3.) Aが命題論理式であるとき，$(\neg A)$は命題論理式である.

(規則4.) AとBがともに命題論理式であるとき,
$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$
は，ともに命題論理式である.

(規則5.) 規則**1**〜**4**により構成されるものだけが命題論理式である.

帰納的定義

(規則 **5**) の代わりに「 帰納的に定義する」という言い方が一般的に用いられる．

定義 8.1. 命題論理式を次のように帰納的に定義する．

(規則 1.) P を命題変数とするとき，P は命題論理式である．

(規則 2.) $\top$ および $\bot$ は命題論理式である．

(規則 3.) A が命題論理式であるとき，$(\neg A)$ は命題論理式である．

(規則 4.) A と B がともに命題論理式であるとき，

$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \to B)$，$(A \leftrightarrow B)$

は，ともに命題論理式である．

なお，講義資料 **(2)** で説明したように，以降，括弧は約束に従って省略する．

例． $((\mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_2) \vee (\neg\bot))$ が命題論理式であることを導く．

(1) **(規則 1.)** から，P_0，P_2 は命題論理式.

(2) **(規則 4.)** を使うと，**(1)** より，$(\mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_2)$ は命題論理式.

(3) **(規則 2.)** から，$\bot$ は命題論理式.

(4) **(規則 3.)** を使うと，**(3)** より，$(\neg\bot)$ は命題論理式.

(5) **(規則 4.)** を使うと，**(2)** と **(4)** より，$((\mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_2) \vee (\neg\bot))$ は命題論理式.

集合を用いた定義

定義 8.2. 集合$C_0, C_1, \ldots$を以下のように定義する．

$$
\begin{array}{lcl}
C_0 & = & \{\mathtt{P}_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\top, \bot\} \\
C_{n+1} & = & C_n \cup \{(\neg A) \mid A \in C_n\} \\
 & & \quad \cup \{(A \wedge B) \mid A, B \in C_n\} \\
 & & \quad \cup \{(A \vee B) \mid A, B \in C_n\} \\
 & & \quad \cup \{(A \to B) \mid A, B \in C_n\} \\
 & & \quad \cup \{(A \leftrightarrow B) \mid A, B \in C_n\}
\end{array}
$$

このとき，以下の集合C_*を命題論理式集合と定義する．

$$C_* = \bigcup_{i \geq 0} C_i$$

冗長だが，普遍的な数学的記述.

“帰納的” の意味

命題論理式の定義における “帰納的” の意味は，

(規則 5.) 規則 **1**〜**4** により構成されるものだけが命題論理式である

であった．つまり，余計なものは入っていないということ．

したがって，帰納的に定義された対象は定義の規則の適用を有限回適用されて構成されている．つまり，その対象に至る，規則の有限回の適用ステップ **(**導出木**)** がある．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathrm{P}_0 \in \mathtt{Prop}}\ \text{規則}\,\mathbf{1} \qquad \dfrac{}{\mathrm{P}_2 \in \mathtt{Prop}}\ \text{規則}\,\mathbf{1}}{(\mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_2) \in \mathtt{Prop}}\ \text{規則}\,\mathbf{4} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\bot \in \mathtt{Prop}}\ \text{規則}\,\mathbf{2}}{(\neg\bot) \in \mathtt{Prop}}\ \text{規則}\,\mathbf{3}}{((\mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_2) \vee (\neg\bot)) \in \mathtt{Prop}}\ \text{規則}\,\mathbf{4}$$

Prop は命題論理式集合を表した **(**⇒ 第 **2** 回講義資料**)**

$((\mathtt{P}_0 \to \mathtt{P}_2) \vee (\neg\bot))$ の導出木

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathtt{P}_0 \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 1} \qquad \dfrac{}{\mathtt{P}_2 \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 1}}{(\mathtt{P}_0 \to \mathtt{P}_2) \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 4} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\bot \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 2}}{(\neg\bot) \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 3}}{((\mathtt{P}_0 \to \mathtt{P}_2) \vee (\neg\bot)) \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 4}$$

演習 8.3. 同様にして，$((\neg\mathtt{P}_0) \to \bot)$ の導出木を書いてみよ．

$((\mathtt{P}_0 \to \mathtt{P}_2) \vee (\neg\bot))$ の導出木

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathtt{P}_0 \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 1} \qquad \dfrac{}{\mathtt{P}_2 \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 1}}{(\mathtt{P}_0 \to \mathtt{P}_2) \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 4} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\bot \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 2}}{(\neg\bot) \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 3}}{((\mathtt{P}_0 \to \mathtt{P}_2) \vee (\neg\bot)) \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 4}$$

演習 8.3.　同様にして，$((\neg\mathtt{P}_0) \to \bot)$ の導出木を書いてみよ．

解答例:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathtt{P}_0 \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 1}}{(\neg\mathtt{P}_0) \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 3} \qquad \dfrac{}{\bot \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 2}}{((\neg\mathtt{P}_0) \to \bot) \in \mathtt{Prop}}\,\text{規則 4}$$

BNFを用いた定義

計算機科学の分野では，帰納的定義に **BNF (Backus-Naur記法)** をよく用いる．

定義 8.4. 命題変数集合Varおよび命題論理式集合Propを以下のように与える：

$$
\begin{array}{rcl}
P \in \mathtt{Var} & ::= & \mathtt{P}_0 \mid \mathtt{P}_1 \mid \cdots \\
A, B \in \mathtt{Prop} & ::= & P \mid \top \mid \bot \mid (\neg A) \mid (A \wedge B) \\
 & & \mid (A \vee B) \mid (A \to B) \mid (A \leftrightarrow B)
\end{array}
$$

数学や論理学の分野ではあまり見かけないが，計算機科学の分野では標準的.

BNFと文脈自由文法

BNFのようなものをどこかで見た記憶がないだろうか?

$$
\begin{array}{rcl}
P \in \texttt{Var} & ::= & \texttt{P}_0 \mid \texttt{P}_1 \mid \cdots \\
A, B \in \texttt{Prop} & ::= & P \mid \top \mid \bot \mid (\neg A) \mid (A \wedge B) \\
 & & \mid (A \vee B) \mid (A \to B) \mid (A \leftrightarrow B)
\end{array}
$$

BNFによる記述は(ほぼ)文脈自由文法に対応する.

$$
\begin{array}{rcl}
A & \longrightarrow & P \mid \top \mid \bot \mid (\neg A) \mid (A \wedge A) \\
 & & \mid (A \vee A) \mid (A \to A) \mid (A \leftrightarrow A) \\
P & \longrightarrow & \texttt{P}_0 \mid \texttt{P}_1 \mid \cdots
\end{array}
$$

実際，BNFで記述された対象のプログラム処理では，字句解析によって命題変数を抽象化して1つの終端記号をして扱えるようにした後，文脈自由言語の技術を用いた構文解析によって，対象の構造を解析する.

目次

- 帰納的定義
- **(構造) 帰納法**
- 帰納法による証明

(構造)帰納法

帰納法

帰納的に定義された対象についての性質を示すための証明法

$\mathcal{P}$を命題論理式に関する性質とする．帰納法は以下を示すことで，すべての命題論理式が性質$\mathcal{P}$をもつことを導く．

(1) 任意の命題変数は性質$\mathcal{P}$をもつ．

(2) $\top$および$\perp$は性質$\mathcal{P}$をもつ．

(3) 任意の命題論理式Aについて，Aが性質$\mathcal{P}$をもつならば，$\neg A$も性質$\mathcal{P}$をもつ．

(4) 任意の命題論理式A, Bについて，AもBも性質$\mathcal{P}$をもつならば， $A \wedge B, A \vee B, A \to B, A \leftrightarrow B$も性質$\mathcal{P}$をもつ．

帰納法の仮定

帰納法の仮定

より構成ステップ数が少ない対象に関して性質$\mathcal{P}$が成立する，という仮定を帰納法の仮定とよぶ.

(3) 任意の命題論理式Aについて，Aが性質$\mathcal{P}$をもつならば，
$\neg A$も性質$\mathcal{P}$をもつ.

(4) 任意の命題論理式A, Bについて，AもBも性質$\mathcal{P}$をもつならば，
$A \wedge B, A \vee B, A \to B, A \leftrightarrow B$も性質$\mathcal{P}$をもつ.

基本ステップ (Base Step)と帰納ステップ (Induction Step)

帰納法の仮定を用いる場合分けを帰納ステップ，帰納法の仮定を用いない場合分けを基本ステップとよぶことがある.

帰納法による推論の妥当性

帰納的に定義された対象は定義の規則の適用を有限回適用されて構成されている．つまり，その対象に至る，規則の有限回の適用ステップがある．

(規則 1.) より P_0，P_2 は命題論理式.
従って，**(規則 4.)** より $(\mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_2)$ は命題論理式.
(規則 2.) より $\perp$ は命題論理式.
従って，**(規則 3.)** より $(\neg\perp)$ は命題論理式.
従って，**(規則 4.)** より $((\mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_2) \vee (\neg\perp))$ は命題論理式.

帰納法による証明の **(1)**〜**(4)** が示されていれば，これらを繰り返し使うことによって，その対象が性質 $\mathcal{P}$ を持つことが導かれる．次のページで具体的に見てみよう．

(規則 1.) より P_0，P_2 は命題論理式.

1. 帰納法による証明 **(1)** より，P_0，P_2 は性質 $\mathcal{P}$ をもつ.

従って，**(規則 4.)** より $(\mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_2)$ は命題論理式.

2. 従って，帰納法による証明 **(4)** より，$(\mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_2)$ は性質 $\mathcal{P}$ をもつ.

(規則 2.) より $\perp$ は命題論理式.

3. 帰納法による証明 **(2)** より，$\perp$ は性質 $\mathcal{P}$ をもつ.

従って，**(規則 3.)** より $(\neg\perp)$ は命題論理式.

4. 従って，帰納法による証明 **(3)** より，$(\neg\perp)$ は性質 $\mathcal{P}$ をもつ.

従って，**(規則 4.)** より $((\mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_2) \vee (\neg\perp))$ は命題論理式.

5. 従って，帰納法による証明 **(4)** より，$((\mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_2) \vee (\neg\perp))$ は性質 $\mathcal{P}$ をもつ.

同様にして，どの命題論理式についても，性質 $\mathcal{P}$ をもつことが導かれる.

(構造) 帰納法 vs. 数学的帰納法

自然数に関する帰納法を特に数学的帰納法という．命題論理式の構造に関する帰納法は，命題論理式のサイズ (出現する記号の数) を考えれば，サイズに関する数学的帰納法で示していると考えることもできる．

逆に，自然数を 0,S(0),$\ldots$と考えれば，数学的帰納法は構造帰納法の一種と考えることも出来る．

数学的帰納法を使って，(命題論理式の)構造帰納法による推論の妥当性を示してみよう．

命題論理式のうち，性質$\mathcal{P}$をもつものをDとおく．すると，すべての命題論理式が性質$\mathcal{P}$をもつことは，$C_* \subseteq D$が成立することに等しい．

帰納法による証明**(1)**～**(4)**が示せていると仮定する．

帰納法による証明**(1)**,**(2)**により，$C_0 \subseteq D$が成立する．帰納法による証明**(3)**,**(4)**により，$C_n \subseteq D$ならば$C_{n+1} \subseteq D$が成立する．

自然数に関する帰納法により，任意の$i \in \mathbb{N}$について，$C_i \subseteq D$．よって，和集合の性質から，$C_* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \subseteq D$．

$\square$

目次

- 帰納的定義
- (構造) 帰納法
- 帰納法による証明

再帰的な定義

　帰納法による証明は再帰的な定義とともに用いられることが多い．対象Aをパラメータとする$f(A)$を定義する際など に，定義のなかにfを用いる場合，その定義を再帰的であるという．

例．　自然数nの階乗$n!$を求める関数fは以下のように与えることが出来る．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textbf{(}x = 0\text{の場合}\textbf{)} \\ x * f(x-1) & \textbf{(}x > 0\text{の場合}\textbf{)} \end{cases}$$

$f(3) = 3*f(2) = 3*2*f(1) = 3*2*1*f(0) = 3*2*1*1 = 6$
再帰的に定義された関数の計算結果を求めるためには，定義を繰り返し展開する必要がある．

再帰的な定義を用いる場合の注意

再帰的な定義を行う際は，きちんと定義になっているか，注意が必要である．例えば，f の呼び出しが無限に繰り返してしまうなどすると，定義として成立しない．定義が，定義として成立している (意味のある定義になっている) とき，**well-defined** であるという．

例えば，以下の再帰的な定義を考えてみる．

$$f(x) = (\text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x * f(x-1))$$

$n \geq 0$ の場合には $f(n) = n!$ となるが，n が負の数の場合には，f の呼び出しが無限に繰り返され，定義されない．従って，f は整数上で **well-defined** でない．

命題論理式のサイズ

定義 8.5. 命題論理式 A の深さ $d(A)$ を次のように定義する．

$$d(A) = \begin{cases} 0 & (A\text{が命題変数のとき}) \\ 0 & (A = \top \text{または} A = \bot \text{のとき}) \\ d(B) + 1 & (A = \neg B \text{のとき}) \\ \max\{d(B), d(C)\} + 1 & (A = B \land C \text{または} A = B \lor C, \\ & A = B \to C,\ A = B \leftrightarrow C \text{のとき}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & d((\mathtt{P} \to (\mathtt{Q} \to (\neg \mathtt{R})))) \\ = {} & \max\{d(\mathtt{P}), d((\mathtt{Q} \to (\neg \mathtt{R})))\} + 1 \\ = {} & \max\{0, d((\mathtt{Q} \to (\neg \mathtt{R})))\} + 1 \\ = {} & \max\{0, \max\{d(\mathtt{Q}), d((\neg \mathtt{R}))\} + 1\} + 1 \\ = {} & \max\{0, \max\{0, d(\mathtt{R}) + 1\} + 1\} + 1 \\ = {} & 3 \end{aligned}$$

演習 8.6. $d(((\neg \mathtt{P}) \wedge (\mathtt{Q} \to \mathtt{R})))$を計算せよ.

演習 8.6. $d(((\neg \texttt{P}) \land (\texttt{Q} \to \texttt{R})))$を計算せよ.

$$
\begin{aligned}
&d(((\neg \texttt{P}) \land (\texttt{Q} \to \texttt{R}))) \\
&= \max\{d((\neg \texttt{P})), d((\texttt{Q} \to \texttt{R}))\} + 1 \\
&= \max\{d(\texttt{P}) + 1, \max\{d(\texttt{Q}), d(\texttt{R})\} + 1\} + 1 \\
&= \max\{1, \max\{0, 0\} + 1\} + 1 \\
&= \max\{1, 1\} + 1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

定義 8.7. 命題結合子(命題定数を含む)の個数 $c(A)$ は以下のように定義される.

$$c(A) = \begin{cases} 0 & (A \text{が命題変数のとき}) \\ 1 & (A = \top \text{または} A = \bot \text{のとき}) \\ c(B) + 1 & (A = \neg B \text{のとき}) \\ c(B) + c(C) + 1 & (A = B \wedge C \text{または} A = B \vee C, \\ & \ A = B \to C,\ A = B \leftrightarrow C \text{のとき}) \end{cases}$$

演習 8.8. $c(((\neg \mathtt{P}) \wedge (\mathtt{Q} \to \mathtt{R})))$ の値を計算せよ.

$$
\begin{aligned}
& c(((\neg \mathtt{P}) \land (\mathtt{Q} \to \mathtt{R}))) \\
= {} & c((\neg \mathtt{P})) + c((\mathtt{Q} \to \mathtt{R})) + 1 \\
= {} & (c(\mathtt{P}) + 1) + (c(\mathtt{Q}) + c(\mathtt{R}) + 1) + 1 \\
= {} & (0 + 1) + (0 + 0 + 1) + 1 \\
= {} & 3
\end{aligned}
$$

演習 8.9. 任意の命題論理式 A について，$d(A) \leq c(A)$ を示せ.

帰納法による証明例 (1)

命題 8.10.　任意の命題論理式 A について，$d(A) \leq c(A)$.

証明．命題論理式 A に関する帰納法により証明を行う．

1. A が命題変数のとき．

$d(A), c(A)$ の定義より，$d(A) = 0$，$c(A) = 0$．ゆえに，$d(A) \leq c(A)$.

2. $A = \top$ または $A = \bot$ のとき．

$d(A), c(A)$ の定義より，$d(A) = 0$，$c(A) = 1$．ゆえに，$d(A) \leq c(A)$.

3. $A = \neg B$ のとき．

帰納法の仮定から，$d(B) \leq c(B)$.

$d(A), c(A)$ の定義より，$d(A) = d(B) + 1$，$c(A) = c(B) + 1$.

よって，$d(A) = d(B) + 1 \leq c(B) + 1 = c(A)$.

4. $A = B \wedge C$，または，$A = B \vee C$，$A = B \to C$，$A = B \leftrightarrow C$ のとき．

帰納法の仮定から，$d(B) \leq c(B)$，$d(C) \leq c(C)$．

$d(A)$ の定義より，$d(A) = \max\{d(B), d(C)\} + 1$．

$c(A)$ の定義より，$c(A) = c(B) + c(C) + 1$．

2つの場合に分けて示す．

(1) $d(B) \leq d(C)$ のとき．

このとき，$\max\{d(B), d(C)\} = d(C)$．

よって，$d(A) = \max\{d(B), d(C)\} + 1 = d(C) + 1 \leq d(B) + d(C) + 1 \leq c(B) + c(C) + 1 = c(A)$．

(2) $d(B) > d(C)$ のとき．

このとき，$\max\{d(B), d(C)\} = d(B)$．

よって，$d(A) = \max\{d(B), d(C)\} + 1 = d(B) + 1 \leq d(B) + d(C) + 1 \leq c(B) + c(C) + 1 = c(A)$．

よって，いずれの場合も $d(A) \leq c(A)$． $\square$

帰納法による証明例 (2)

命題論理式の変換tを以下のように定義する.

$$t(A) = \begin{cases} \neg A & (A\text{が命題変数のとき}) \\ \top & (A = \bot\text{のとき}) \\ \bot & (A = \top\text{のとき}) \\ \neg\, t(B) & (A = \neg B\text{のとき}) \\ t(B) \vee t(C) & (A = B \wedge C\text{のとき}) \\ t(B) \wedge t(C) & (A = B \vee C\text{のとき}) \\ \neg(t(C) \to t(B)) & (A = B \to C\text{のとき}) \\ \neg(t(B) \leftrightarrow t(C)) & (A = B \leftrightarrow C\text{のとき}) \end{cases}$$

演習 8.11. $t(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})$を求めよ.

(解答)

$$\begin{aligned} t(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) &= t(\mathtt{P}) \vee t(\mathtt{Q}) \\ &= (\neg\mathtt{P}) \vee (\neg\mathtt{Q}) \end{aligned}$$

演習 8.12. 任意の命題論理式 A について $t(A) \cong \neg A$ となること証明せよ.

証明. 命題論理式Aに関する帰納法により証明を行う.

1. Aが命題変数のとき.

$t(A) = \neg A \cong \neg A$より成立.

2. $A = \bot$のとき.

$t(A) = \top \cong \neg\bot = \neg A$より成立.

3. $A = \top$のとき.

$t(A) = \bot \cong \neg\top = \neg A$より成立.

4. $A = \neg B$のとき.

帰納法の仮定から, $t(B) \cong \neg B$.

よって, $t(A) = \neg t(B) \cong \neg\neg B = \neg A$より成立.

5. $A = B \wedge C$のとき.

帰納法の仮定から, $t(B) \cong \neg B$, $t(C) \cong \neg C$.

よって, $t(A) = t(B) \vee t(C) \cong \neg B \vee \neg C \cong \neg(B \wedge C) = \neg A$
より成立.

6. $A = B \vee C$のとき.

帰納法の仮定から，$t(B) \cong \neg B$, $t(C) \cong \neg C$.

よって，$t(A) = t(B) \wedge t(C) \cong \neg B \wedge \neg C \cong \neg(B \vee C) = \neg A$ より成立.

7. $A = B \to C$のとき.

帰納法の仮定から，$t(B) \cong \neg B$, $t(C) \cong \neg C$. よって，$t(A) = \neg(t(C) \to t(B)) \cong \neg(\neg C \to \neg B) \cong \neg(\neg\neg C \vee \neg B) \cong \neg(C \vee \neg B) \cong \neg(\neg B \vee C) \cong \neg(B \to C) = \neg A$より成立.

8. $A = B \leftrightarrow C$のとき.

帰納法の仮定から，$t(B) \cong \neg B$, $t(C) \cong \neg C$. よって，$t(A) = \neg(t(B) \leftrightarrow t(C)) \cong \neg(\neg B \leftrightarrow \neg C) \cong \neg((\neg B \to \neg C) \wedge (\neg C \to \neg C)) \cong \neg((C \to B) \wedge (B \to C)) \cong \neg((B \to C) \wedge (C \to B)) \cong \neg(B \leftrightarrow C) = \neg A$より成立. $\square$

帰納法による証明例 (3)

定義 8.13.　命題論理式Aに含まれる命題変数の集合$\mathrm{V}(A)$は次のように定義される.

$$\mathrm{V}(A) = \begin{cases} \{A\} & (A\text{が命題変数のとき}) \\ \emptyset & (A = \top\text{または}A = \bot\text{のとき}) \\ \mathrm{V}(B) & (A = \neg B\text{のとき}) \\ \mathrm{V}(B) \cup \mathrm{V}(C) & (A = B \wedge C\text{または}A = B \vee C, \\ & \quad A = B \to C,\ A = B \leftrightarrow C\text{のとき}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{V}((\neg(\mathtt{P} \wedge \mathtt{P}))) &= \mathrm{V}((\mathtt{P} \wedge \mathtt{P})) \\ &= \mathrm{V}(\mathtt{P}) \cup \mathrm{V}(\mathtt{P}) \\ &= \{\mathtt{P}\} \end{aligned}$$

演習 8.14.　$\mathrm{V}(((\neg\mathtt{R}) \vee \mathtt{S}))$を計算せよ.

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(((\neg\mathtt{R})\vee\mathtt{S})) &= \mathrm{V}((\neg\mathtt{R}))\cup\mathrm{V}(\mathtt{S})\\ &= \mathrm{V}(\mathtt{R})\cup\{\mathtt{S}\}\\ &= \{\mathtt{R}\}\cup\{\mathtt{S}\}\\ &= \{\mathtt{R},\mathtt{S}\}\end{aligned}$$

演習 8.15. $|\mathrm{V}(A)| \leq 2^{d(A)}$，つまり，命題論理式 A に含まれる変数の個数はたかだか $2^{d(A)}$ 個となることを示せ．

証明．命題論理式Aに関する帰納法により証明を行う．

1．Aが命題変数のとき．

このとき，Vの定義より，$\mathrm{V}(A) = \{A\}$．よって，$|\mathrm{V}(A)| = 1$．一方，命題論理式の深さdの定義より，$d(A) = 0$．よって，$2^{d(A)} = 2^0 = 1$．

ゆえに，$|\mathrm{V}(A)| = 1 \leq 1 = 2^{d(A)}$．

2．$A = \top$または$A = \bot$のとき．

このとき，Vの定義より，$\mathrm{V}(A) = \emptyset$．よって，$|\mathrm{V}(A)| = 0$．一方，命題論理式の深さ$d$の定義より，$d(A) = 0$．よって，$2^{d(A)} = 2^0 = 1$．

ゆえに，$|\mathrm{V}(A)| = 0 \leq 1 = 2^{d(A)}$．

3．$A = \neg B$のとき．

このとき，Vの定義より，$\mathrm{V}(A) = \mathrm{V}(B)$．よって，$|\mathrm{V}(A)| = |\mathrm{V}(B)|$．

一方，命題論理式の深さ d の定義より，$d(A) = d(B) + 1$.
また，帰納法の仮定により，$|\mathrm{V}(B)| \leq 2^{d(B)}$.
ゆえに，($d(B) \geq 0$ であることから)，$|\mathrm{V}(A)| = |\mathrm{V}(B)| \leq 2^{d(B)} \leq 2^{d(B)} \cdot 2 = 2^{d(B)+1} = 2^{d(A)}$.

4. $A = B \wedge C$，または，$A = B \vee C$，$A = B \rightarrow C$，$A = B \leftrightarrow C$ のとき．

このとき，V の定義より，$\mathrm{V}(A) = \mathrm{V}(B) \cup \mathrm{V}(C)$．よって，$|\mathrm{V}(A)| \leq |\mathrm{V}(B)| + |\mathrm{V}(C)|$．(集合に重なりがあるときは，$|\mathrm{V}(A)| < |\mathrm{V}(B)| + |\mathrm{V}(C)|$ となることに注意．) 一方，命題論理式の深さ d の定義より，$d(A) = \max\{d(B), d(C)\} + 1$.
また，帰納法の仮定により，$|\mathrm{V}(B)| \leq 2^{d(B)}$，$|\mathrm{V}(C)| \leq 2^{d(C)}$．ゆえに，$|\mathrm{V}(A)| \leq |\mathrm{V}(B)| + |\mathrm{V}(C)| \leq 2^{d(B)} + 2^{d(C)} \leq 2^{\max\{d(B),d(C)\}} + 2^{\max\{d(B),d(C)\}} = 2^{\max\{d(B),d(C)\}+1} = 2^{d(A)}$. $\square$

帰納法による証明例 (4)

定義 8.16. 命題論理式Aの部分論理式の集合$\mathrm{Sub}(A)$を次のように定義する．

$$
\mathrm{Sub}(A) = \begin{cases} \{A\} & (A\text{が命題変数または}\\ & \;A = \top\text{または}A = \bot\text{のとき})\\ \mathrm{Sub}(B) \cup \{A\} & (A = \neg B\text{のとき})\\ \mathrm{Sub}(B) \cup \mathrm{Sub}(C) \cup \{A\} & (A = B \wedge C\text{または}\\ & \quad A = B \vee C,\; A = B \to C,\\ & \quad A = B \leftrightarrow C\text{のとき}) \end{cases}
$$

例. $\mathrm{Sub}((\neg(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})))$

$= \mathrm{Sub}((\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})) \cup \{(\neg(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}))\}$

$= \mathrm{Sub}(\mathtt{P}) \cup \mathrm{Sub}(\mathtt{Q}) \cup \{(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})\} \cup \{(\neg(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}))\}$

$= \{\mathtt{P}\} \cup \{\mathtt{Q}\} \cup \{(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})\} \cup \{(\neg(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}))\}$

$= \{\mathtt{P}, \mathtt{Q}, (\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}), (\neg(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}))\}$

演習 8.17. $\mathrm{Sub}(((\neg \mathtt{R}) \vee \mathtt{R}))$ を計算せよ.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Sub}(((\neg \mathtt{R}) \vee \mathtt{R})) \\
&= \mathrm{Sub}((\neg \mathtt{R})) \cup \mathrm{Sub}(\mathtt{R}) \cup \{((\neg \mathtt{R}) \vee \mathtt{R})\} \\
&= \mathrm{Sub}(\mathtt{R}) \cup \{(\neg \mathtt{R})\} \cup \{\mathtt{R}\} \cup \{((\neg \mathtt{R}) \vee \mathtt{R})\} \\
&= \{\mathtt{R}\} \cup \{(\neg \mathtt{R})\} \cup \{\mathtt{R}\} \cup \{((\neg \mathtt{R}) \vee \mathtt{R})\} \\
&= \{\mathtt{R}, (\neg \mathtt{R}), ((\neg \mathtt{R}) \vee \mathtt{R})\}
\end{aligned}
$$

演習 8.18. A, Bを命題論理式としたとき，$A \in \mathrm{Sub}(B)$ならば$\mathrm{V}(A) \subseteq \mathrm{V}(B)$となることを示せ.

AとBのどちらの命題論理式に関する帰納法を使うと良いのだろうか? この場合，実は，Bに関する帰納法を用いると証明に成功し，Aに関する帰納法を用いると証明に失敗する.

証明. 命題論理式Bに関する帰納法により証明を行う.

1. Bが命題変数または$B=\top$, $B=\bot$のとき.

このとき$\mathrm{Sub}(B)=\{B\}$. 従って, $A\in\mathrm{Sub}(B)$とすると, $A=B$. よって, $\mathrm{V}(A)\subseteq\mathrm{V}(B)$.

2. $B=\neg C$のとき.

このとき$\mathrm{Sub}(B)=\mathrm{Sub}(C)\cup\{B\}$. よって, $A\in\mathrm{Sub}(B)$とすると$A=B$または$A\in\mathrm{Sub}(C)$. $A=B$のとき. $V(A)\subseteq V(B)$は明らか. $A\in\mathrm{Sub}(C)$のとき. このときは, 帰納法の仮定より$V(A)\subseteq V(C)$. また, 定義より$V(B)=V(C)$. よって$V(A)\subseteq V(B)$が成立する.

3. $B=C\wedge D$または$B=C\vee D$, $B=C\to D$, $B=C\leftrightarrow D$のとき.

このとき$\mathrm{Sub}(B)=\mathrm{Sub}(C)\cup\mathrm{Sub}(D)\cup\{B\}$. よって, $A\in\mathrm{Sub}(B)$とすると$A\in\mathrm{Sub}(C)$, $A\in\mathrm{Sub}(D)$, $A=B$のい

づれかが成立する．$A = B$のとき． $V(A) \subseteq V(B)$は明らか．$A \in \mathrm{Sub}(C)$のとき．帰納法の仮定より$V(A) \subseteq V(C)$. また，定義より$V(C) \subseteq V(C) \cup V(D) = V(B)$. よって，$V(A) \subseteq V(B)$. $A \in \mathrm{Sub}(D)$のとき．$A \in \mathrm{Sub}(C)$と同様.

$\square$

まとめ

- 帰納的定義
- (構造) 帰納法による証明

  帰納的に定義された対象に関する性質を証明

  帰納法の仮定とは
- 再帰的な定義

  それ自身を定義のなかで用いた定義

  再帰的に定義された値の計算

  定義が **well-defined** であるとは