2018 年 10 月 5 日

「オートマトンと形式言語」補足資料 (1)

1　文字列に関する補足 (教科書 0.2 節)

- ε は空文字列を表わしているから，任意の文字列 w について，$\varepsilon w = w\varepsilon = w$
- ε は文字列の連結に関する単位元なので，以下のように定義する：任意の文字列 w について，$w^0 = \varepsilon$
- 任意の $k \geq 0$ について，$\varepsilon^k = \varepsilon$
- Σ を文字集合とする．このとき，Σ^* は，以下のように定義される文字列の集合:

$$\Sigma^* = \{x_1 \cdots x_k \mid k \geq 0, \text{任意の } 1 \leq i \leq k \text{ について } x_i \in \Sigma\}$$

- 以下の性質が成り立つことにも注意:
  1. $\varepsilon \in \Sigma^*$
  2. $u \in \Sigma^*$ かつ $w \in \Sigma^*$ ならば，$uw \in \Sigma^*$

2　有限オートマトンの計算に関する補足 (教科書 1.1 節)

定義 1 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を (決定性) 有限オートマトンとする．このとき，$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ を以下のように再帰的に定義する：

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} q & (w = \varepsilon \text{ の場合}) \\ \hat{\delta}(\delta(x, q), w') & (w = xw',\ x \in \Sigma \text{ の場合}) \end{cases}$$

遷移関数 δ は，$\delta : Q \times \Sigma \to Q$．一方，上で定義した関数 $\hat{\delta}$ は，$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ であることに注意.

例 2 例 1.7 の有限オートマトン $M_2 = (\{q_1, q_2\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, \delta, q_1, \{q_2\})$ を考える．このとき，

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q_1, \mathtt{101}) &= \hat{\delta}(\delta(q_1, \mathtt{1}), \mathtt{01}) \\ &= \hat{\delta}(q_2, \mathtt{01}) \\ &= \hat{\delta}(\delta(q_2, \mathtt{0}), \mathtt{1}) \\ &= \hat{\delta}(q_1, \mathtt{1}) \\ &= \hat{\delta}(\delta(q_1, \mathtt{1}), \varepsilon) \\ &= \hat{\delta}(q_2, \varepsilon) \\ &= q_2 \end{aligned}$$

上で定義した関数 $\hat{\delta}$ を用いると，有限オートマトンの受理する言語は，以下のように定義できる：

定義 3 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を (決定性) 有限オートマトンとする．このとき，M の認識する (受理する) 言語 $L(M)$ は，次のように定義される.

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

3　演算に関する補足 (p.51)

1. Aを集合とするとき，関数 $f : A^2 \to A$を A 上の 2 項演算という．
2. fを集合 A 上の 2 項演算とし，$B \subseteq A$とする．任意の $a, b \in B$について $f(a, b) \in B$となるとき，Bは 2 項演算 fについて閉じている，という．

4　補集合を認識する有限オートマトン (演習 1.5)

以下では，次の集合演算を用いる．

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

(Aが全体集合である場合，$A \setminus B$は Bの補集合を表わす．)

定理 4 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$を (決定性) 有限オートマトンとする．このとき，(決定性) 有限オートマトン M'を以下のように定義する：

$$M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$$

このとき，$\Sigma^* \setminus L(M) = L(M')$.

証明.

$$\begin{array}{lll}
\multicolumn{2}{l}{w \in \Sigma^* \setminus L(M)} & \\
\iff & w \in \Sigma^* \land w \notin L(M) & (\setminus \text{の定義より}) \\
\iff & w \in \Sigma^* \land w \notin \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\} & (L(M) \text{の定義より}) \\
\iff & w \in \Sigma^* \land \neg(w \in \Sigma^* \land \hat{\delta}(q_0, w) \in F) & (\text{内包表記の展開}) \\
\iff & w \in \Sigma^* \land \neg(\hat{\delta}(q_0, w) \in F) & (\text{論理演算による同値変形}) \\
\iff & w \in \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \notin F\} & (\text{内包表記への変形}) \\
\iff & w \in \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in Q \setminus F\} & \\
\iff & w \in L(M') &
\end{array}$$

□

5　定理 1.25 に関する補足 (教科書 1.1 節)

定理 5 $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$および $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$を (決定性) 有限オートマトンとする．このとき，(決定性) 有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$を以下により定義する：

1. $Q = Q_1 \times Q_2$,
2. $\delta((r_1, r_2), x) = (\delta_1(r_1, x), \delta_2(r_2, x))$,
3. $q_0 = (q_1, q_2)$,
4. $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$.

このとき，$L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$.

証明. まず，

$$\textbf{性質 (A)} : \text{任意の } w \in \Sigma^*, r_1 \in Q_1, r_2 \in Q_2 \text{ について，} \quad (\hat{\delta}_1(r_1, w), \hat{\delta}_2(r_2, w)) = \hat{\delta}((r_1, r_2), w)$$

を示す.

性質 (A) の証明. 文字列 w の長さに関する帰納法で示す.

1. $|w| = 0$ の場合．このとき，$w = \varepsilon$．よって，

$$(\hat{\delta}_1(r_1, \varepsilon), \hat{\delta}_2(r_2, \varepsilon)) = (r_1, r_2) = \hat{\delta}((r_1, r_2), \varepsilon)$$

2. $|w| > 0$ の場合．このとき，$w = xw'$ $(x \in \Sigma, w' \in \Sigma^*)$ とおける．いま，$\delta_1(r_1, x) = r_1'$，$\delta_2(r_2, x) = r_2'$ とおくと，δ の定義から，

$$(r_1', r_2') = (\delta_1(r_1, x), \delta_2(r_2, x)) = \delta((r_1, r_2), x) \tag{1}$$

   が成立する．よって，

$$\begin{array}{lll} & (\hat{\delta}_1(r_1, xw'), \hat{\delta}_2(r_2, xw')) & \\ = & (\hat{\delta}_1(\delta_1(r_1, x), w'), \hat{\delta}_2(\delta_2(r_2, x), w')) & (\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2 \text{ の定義より}) \\ = & (\hat{\delta}_1(r_1', w'), \hat{\delta}_2(r_2', w')) & (r_1', r_2' \text{ の定義より}) \\ = & \hat{\delta}((r_1', r_2'), w') & (\text{帰納法の仮定より}) \\ = & \hat{\delta}(\delta((r_1, r_2), x), w') & (\text{等式 (1) より}) \\ = & \hat{\delta}((r_1, r_2), xw') & (\hat{\delta} \text{ の定義より}) \end{array}$$

(性質 (A) の証明の終わり)

従って，

$$\begin{array}{lll} & w \in L(M_1) \cup L(M_2) & \\ \iff & w \in L(M_1) \vee w \in L(M_2) & \\ \iff & w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w) \in F_1 \vee \hat{\delta}_2(q_2, w) \in F_2) & \\ \iff & w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)) \in (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2) & \\ \iff & w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)) \in F & (F \text{ の定義より}) \\ \iff & w \in \Sigma^* \wedge \hat{\delta}((q_1, q_2), w) \in F & (\text{性質 (A) より}) \\ \iff & w \in \Sigma^* \wedge \hat{\delta}(q_0, w) \in F & (q_0 \text{ の定義より}) \\ \iff & w \in \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\} & \\ \iff & w \in L(M) & \end{array}$$

□

定理 6 $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ および $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ を (決定性) 有限オートマトンとする．このとき，(決定性) 有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を以下により定義する：

1. $Q = Q_1 \times Q_2$,
2. $\delta((r_1, r_2), x) = (\delta_1(r_1, x), \delta_2(r_2, x))$,
3. $q_0 = (q_1, q_2)$,

4. $F = F_1 \times F_2$.

このとき，$L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$.

証明. まず，性質 (A) は定理 5 のときと同様に証明できる．これを使って，

$$
\begin{aligned}
& w \in L(M_1) \cap L(M_2) \\
\iff \quad & w \in L(M_1) \wedge w \in L(M_2) \\
\iff \quad & w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w) \in F_1 \wedge \hat{\delta}_2(q_2, w) \in F_2) \\
\iff \quad & w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)) \in F_1 \times F_2 \\
\iff \quad & w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)) \in F \\
\iff \quad & w \in \Sigma^* \wedge \hat{\delta}((q_1, q_2), w) \in F && \text{(性質 (A) より)} \\
\iff \quad & w \in \Sigma^* \wedge \hat{\delta}(q_0, w) \in F && \text{(q_0 の定義より)} \\
\iff \quad & w \in \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\} \\
\iff \quad & w \in L(M)
\end{aligned}
$$

□