2020 年 10 月 9 日

「オートマトンと形式言語」補足資料 (1)

1 文字列に関する補足 (教科書 0.2 節)

- ε は空文字列を表わしているから，任意の文字列 w について，$\varepsilon w = w\varepsilon = w$
- ε は文字列の連結に関する単位元なので，以下のように定義する：任意の文字列 w について，$w^0 = \varepsilon$
- 任意の $k \geq 0$ について，$\varepsilon^k = \varepsilon$
- Σ を文字集合とする．このとき，Σ^* は，以下のように定義される文字列の集合:

$$\Sigma^* = \{x_1 \cdots x_k \mid k \geq 0, \text{任意の } 1 \leq i \leq k \text{ について } x_i \in \Sigma\}$$

- 以下の性質が成り立つことにも注意:
    1. $\varepsilon \in \Sigma^*$
    2. $u \in \Sigma^*$ かつ $w \in \Sigma^*$ ならば，$uw \in \Sigma^*$

2 有限オートマトンの計算に関する補足 (教科書 1.1 節)

定義 1 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を (決定性) 有限オートマトンとする．このとき，$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ を以下のように再帰的に定義する：

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} q & (w = \varepsilon \text{ の場合}) \\ \hat{\delta}(\delta(x, q), w') & (w = xw',\ x \in \Sigma \text{ の場合}) \end{cases}$$

遷移関数 δ は，$\delta : Q \times \Sigma \to Q$．一方，上で定義した関数 $\hat{\delta}$ は，$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ であることに注意．

例 2 例 1.7 の有限オートマトン $M_2 = (\{q_1, q_2\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, \delta, q_1, \{q_2\})$ を考える．このとき，

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q_1, \mathtt{101}) &= \hat{\delta}(\delta(q_1, \mathtt{1}), \mathtt{01}) \\ &= \hat{\delta}(q_2, \mathtt{01}) \\ &= \hat{\delta}(\delta(q_2, \mathtt{0}), \mathtt{1}) \\ &= \hat{\delta}(q_1, \mathtt{1}) \\ &= \hat{\delta}(\delta(q_1, \mathtt{1}), \varepsilon) \\ &= \hat{\delta}(q_2, \varepsilon) \\ &= q_2 \end{aligned}$$

上で定義した関数 $\hat{\delta}$ を用いると，有限オートマトンの受理する言語は，以下のように定義できる：

定義 3 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を (決定性) 有限オートマトンとする．このとき，M の認識する (受理する) 言語 $L(M)$ は，次のように定義される．

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

3　演算に関する補足 (p.51)

1. $n \geq 1$を自然数とし，Aを集合とするとき，関数 $f : A^n \to A$を A上の n項演算という．なお，$n = 1$のときは，$A^1 = A$に注意．$n = 1$のときは単項演算ともいう．

2. fを集合 A上の n項演算とし，$B \subseteq A$とする．任意の $b_1, \ldots, b_n \in B$について $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$となるとき，$B$は演算 fについて閉じている，という．

4　補集合を認識する有限オートマトン (演習 1.5)

以下では，次の集合演算を用いる．

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

(Aが全体集合である場合，$A \setminus B$は Bの補集合を表わす．)

定理 4 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$を (決定性) 有限オートマトンとする．このとき，(決定性) 有限オートマトン M'を以下のように定義する：

$$M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$$

このとき，$\Sigma^* \setminus L(M) = L(M')$.

証明.

$$\begin{array}{lll}
 & w \in \Sigma^* \setminus L(M) & \\
\iff & w \in \Sigma^* \wedge w \notin L(M) & (\setminus \text{の定義より}) \\
\iff & w \in \Sigma^* \wedge w \notin \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\} & (L(M) \text{の定義より}) \\
\iff & w \in \Sigma^* \wedge \neg(w \in \Sigma^* \wedge \hat{\delta}(q_0, w) \in F) & (\text{内包表記の展開}) \\
\iff & w \in \Sigma^* \wedge \neg(\hat{\delta}(q_0, w) \in F) & (\text{論理演算による同値変形}) \\
\iff & w \in \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \notin F\} & (\text{内包表記への変形}) \\
\iff & w \in \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in Q \setminus F\} & \\
\iff & w \in L(M') &
\end{array}$$

□

5　定理 1.25 に関する補足 (教科書 1.1 節) (1)

定理 5 $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$および $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$を (決定性) 有限オートマトンとする．このとき，(決定性) 有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$を以下により定義する：

1. $Q = Q_1 \times Q_2$,

2. $\delta((r_1, r_2), x) = (\delta_1(r_1, x), \delta_2(r_2, x))$,

3. $q_0 = (q_1, q_2)$,

4. $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$.

このとき，$L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$.

証明. まず,

$$\textbf{性質 (A)} : \text{任意の } w \in \Sigma^*, r_1 \in Q_1, r_2 \in Q_2 \text{ について，} \quad (\hat{\delta}_1(r_1, w), \hat{\delta}_2(r_2, w)) = \hat{\delta}((r_1, r_2), w)$$

を示す.

性質 (A) の証明. 文字列 w の長さに関する帰納法で示す.

1. $|w| = 0$ の場合. このとき，$w = \varepsilon$. よって，

$$(\hat{\delta}_1(r_1, \varepsilon), \hat{\delta}_2(r_2, \varepsilon)) = (r_1, r_2) = \hat{\delta}((r_1, r_2), \varepsilon)$$

2. $|w| > 0$ の場合. このとき，$w = xw'$ $(x \in \Sigma, w' \in \Sigma^*)$ とおける. いま，$\delta_1(r_1, x) = r_1'$，$\delta_2(r_2, x) = r_2'$ とおくと，δ の定義から，

$$(r_1', r_2') = (\delta_1(r_1, x), \delta_2(r_2, x)) = \delta((r_1, r_2), x) \tag{1}$$

が成立する. よって，

$$\begin{array}{lll} & (\hat{\delta}_1(r_1, xw'), \hat{\delta}_2(r_2, xw')) & \\ = & (\hat{\delta}_1(\delta_1(r_1, x), w'), \hat{\delta}_2(\delta_2(r_2, x), w')) & (\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2 \text{ の定義より}) \\ = & (\hat{\delta}_1(r_1', w'), \hat{\delta}_2(r_2', w')) & (r_1', r_2' \text{ の定義より}) \\ = & \hat{\delta}((r_1', r_2'), w') & (\text{帰納法の仮定より}) \\ = & \hat{\delta}(\delta((r_1, r_2), x), w') & (\text{等式 (1) より}) \\ = & \hat{\delta}((r_1, r_2), xw') & (\hat{\delta} \text{ の定義より}) \end{array}$$

(性質 (A) の証明の終わり)

従って，

$$\begin{array}{lll} & w \in L(M_1) \cup L(M_2) & \\ \Longleftrightarrow & w \in L(M_1) \vee w \in L(M_2) & \\ \Longleftrightarrow & w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w) \in F_1 \vee \hat{\delta}_2(q_2, w) \in F_2) & \\ \Longleftrightarrow & w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)) \in (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2) & \\ \Longleftrightarrow & w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)) \in F & (F \text{ の定義より}) \\ \Longleftrightarrow & w \in \Sigma^* \wedge \hat{\delta}((q_1, q_2), w) \in F & (\text{性質 (A) より}) \\ \Longleftrightarrow & w \in \Sigma^* \wedge \hat{\delta}(q_0, w) \in F & (q_0 \text{ の定義より}) \\ \Longleftrightarrow & w \in \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\} & \\ \Longleftrightarrow & w \in L(M) & \end{array}$$

□

定理 6 $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ および $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ を (決定性) 有限オートマトンとする. このとき，(決定性) 有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を以下により定義する：

1. $Q = Q_1 \times Q_2$,

2. $\delta((r_1, r_2), x) = (\delta_1(r_1, x), \delta_2(r_2, x))$,

3. $q_0 = (q_1, q_2)$,

4. $F = F_1 \times F_2$.

このとき，$L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$.

証明. まず，性質 (A) は定理 5 のときと同様に証明できる．これを使って，

$$
\begin{array}{lll}
w \in L(M_1) \cap L(M_2) & & \\
\iff & w \in L(M_1) \wedge w \in L(M_2) & \\
\iff & w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w) \in F_1 \wedge \hat{\delta}_2(q_2, w) \in F_2) & \\
\iff & w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)) \in F_1 \times F_2 & \\
\iff & w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)) \in F & \\
\iff & w \in \Sigma^* \wedge \hat{\delta}((q_1, q_2), w) \in F & (\text{性質 (A) より}) \\
\iff & w \in \Sigma^* \wedge \hat{\delta}(q_0, w) \in F & (q_0 \text{ の定義より}) \\
\iff & w \in \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\} & \\
\iff & w \in L(M) &
\end{array}
$$

□

6 定理 1.25 に関する補足 (教科書 1.1 節) (2)

前節の定理では，M_1 と M_2 として，シグニチャが同一のものを考えた．異なるシグニチャをもつ場合はどうなるだろうか.

一般に，$M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1)$，$M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$ とおくとき，まず $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ととり，$L(M_1') = L(M_1)$，$L(M_2') = L(M_2)$ となるような，$M_1' = (Q_1', \Sigma, \delta_1', q_1', F_1')$，$M_2' = (Q_2', \Sigma, \delta_2', q_2', F_2')$ を構成した後に，前節の構成を適用すれば，$L(M_1) \cap L(M_2) = L(M_1') \cap L(M_2')$ や $L(M_1) \cup L(M_2) = L(M_1') \cup L(M_2')$ を認識する (決定性) 有限オートマトンを構成することができる．

このように，考えるシグニチャを広げて (最初考えていなかった記号でも動くようにして)，しかも，認識する言語を変えないようなことはできるのだろうか．それは以下のようにすればよい.

定理 7 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を (決定性) 有限オートマトンとする．Γ を $\Sigma \subseteq \Gamma$ なるアルファベットとする．このとき，(決定性) 有限オートマトン $M' = (Q', \Gamma, \xi, q_0, F)$ を以下により定義する：

1. $Q' = Q \cup \{q'\}$. ただし，$q' \notin Q$ とする．

2. $$\xi(r, x) = \begin{cases} \delta(r, x) & (r \in Q \text{ かつ } x \in \Sigma \text{ の場合}) \\ q' & (r \notin Q \text{ または } x \notin \Sigma \text{ の場合}) \end{cases}$$

このとき，$L(M) = L(\hat{M})$.

証明. まず,

$$\textbf{性質 (B)}: 任意の\ w \in \Sigma^*, r \in Q\ について，\delta(r, w) = \hat{\xi}(r, w)$$

を示す.

性質 (B) の証明. 文字列 $w \in \Sigma^*$ の長さに関する帰納法で示す.

1. $|w| = 0$ の場合. このとき，$w = \varepsilon$. よって，

$$\hat{\delta}(r, \varepsilon) = r = \xi(r, \varepsilon)$$

2. $|w| > 0$ の場合. このとき，$w = xw'$ $(x \in \Sigma, w' \in \Sigma^*)$ とおける. いま，$\delta(r, x) = r'$ とおくと，$r' \in Q$ であることに注意する.

$$\begin{array}{rcll} \hat{\delta}(r, xw') & = & \hat{\delta}(\delta(r, x), w') & (\hat{\delta}\ \text{の定義より}) \\ & = & \hat{\xi}(\delta(r, x), w') & (w' \in \Sigma^*\ \text{と}\ \delta(r, x) \in Q\ \text{より，帰納法の仮定から}) \\ & = & \hat{\xi}(\xi(r, x), w') & (r \in Q, x \in \Sigma\ \text{より，}\xi\ \text{の定義から}) \\ & = & \hat{\xi}(r, xw') & (\hat{\xi}\ \text{の定義より}) \end{array}$$

(性質 (B) の証明の終わり)

次に，

$$\textbf{性質 (B')}: 任意の\ w \in \Gamma^*\ について，\hat{\xi}(q', w) = q'$$

を示す.

性質 (B') の証明. 文字列 $w \in \Sigma^*$ の長さに関する帰納法で示す.

1. $|w| = 0$ の場合. このとき，$w = \varepsilon$. よって，定義より，$\hat{\xi}(q', \varepsilon) = q'$ が成立.

2. $|w| > 0$ の場合. このとき，$w = xw'$ $(x \in \Gamma, w' \in \Gamma^*)$ とおける.

$$\begin{array}{rcll} \hat{\xi}(q', xw') & = & \hat{\xi}(\xi(q', x), w') & (\hat{\xi}\ \text{の定義より}) \\ & = & \hat{\xi}(q', w') & (\xi\ \text{の定義より}) \\ & = & q' & (\text{帰納法の仮定より}) \end{array}$$

(性質 (B') の証明の終わり)

次に，

$$\textbf{性質 (B")}: 任意の\ w \in \Gamma^* \setminus \Sigma^*\ と\ r \in Q'\ について，\hat{\xi}(r, w) = q'$$

を示す.

性質 (B') の証明. 文字列 $w \in \Sigma^*$ の長さに関する帰納法で示す.

1. $|w| = 0$ の場合. このとき，$w = \varepsilon$. よって，$w \notin \Gamma^* \setminus \Sigma^*$ となるので，自明に成立する.

2. $|w| > 0$ の場合. このとき，$w = xw'$ $(x \in \Gamma, w' \in \Gamma^*)$ とおけ，仮定 $w \notin \Sigma^*$ より，$x \notin \Sigma$ または $w' \notin \Sigma^*$ が成立する.

- $\underline{x \notin \Sigma\text{ の場合}}$

$$\begin{aligned}\hat{\xi}(r, xw') &= \hat{\xi}(\xi(r,x), w') && (\hat{\xi}\text{ の定義より}) \\ &= \hat{\xi}(q', w') && (x \notin \Sigma\text{ より，}\xi\text{ の定義から}) \\ &= q' && (\text{性質 (B') より})\end{aligned}$$

- $\underline{w' \notin \Sigma^*\text{ の場合}}$

$$\begin{aligned}\hat{\xi}(r, xw') &= \hat{\xi}(\xi(r,x), w') && (\hat{\xi}\text{ の定義より}) \\ &= q' && (\text{帰納法の仮定より})\end{aligned}$$

(性質 (B") の証明の終わり)

以上の準備を用いて，定理を示す．

$$\text{任意の } w \in \Gamma^* \text{ について，} w \in L(M) \Longleftrightarrow w \in L(M')$$

示せばよい．2 通りに場合分けする．

- $\underline{w \in \Sigma^*\text{ の場合}}$

$$\begin{aligned}w \in L(M) &\Longleftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \in F \\ &\Longleftrightarrow \hat{\xi}(q_0, w) \in F \quad (w \in \Sigma^*, q_0 \in Q\text{ より，性質 (B) から}) \\ &\Longleftrightarrow w \in L(M')\end{aligned}$$

- $\underline{w \notin \Sigma^*\text{ の場合}}$
  このとき，$L(M) \subseteq \Sigma^*$ より，$w \in L(M)$ は成立しない．よって，$w \notin L(M')$ を示せば十分．

  いま，$w \in \Gamma^*$ で $w \notin \Sigma^*$ であるから，$w \in \Gamma^* \setminus \Sigma^*$．したがって，性質 (B") より，$\hat{\xi}(q_0, w) = q'$．よって，$q' \notin F$ より，$w \notin L(M')$ となる．

$\square$