

2019年度 数理論理学 復習問題 (18)

問題 1 シグニチャ $L = \langle \emptyset, \{P^1\} \rangle$ を考える. このとき, 述語論理式 $\forall x \forall y (P(x) \wedge x \approx y \rightarrow P(y))$ は恒真となることを示せ.

問題 2 シグニチャ $L = \langle \emptyset, \{P^1, Q^1\} \rangle$ を考える. このとき, 述語論理式 $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ は恒真となることを示せ.

問題 3 以下の述語論理式に対する反例を与えると同時に, それが反例になっていることを示せ.

- (1) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
- (2) $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$
- (3) $\forall x P(x, x) \rightarrow \forall y \forall z P(y, z)$

問題 4 以下の述語論理式に対する反例を与えると同時に, それが反例になっていることを示せ.

- (1) $\forall x P(x)$
- (2) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \forall x Q(x)$
- (3) $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x P(x, x)$

問題 5 下記のハッセ図 (ア)~(カ) で表わされる半順序集合の L -構造のうち, 以下の述語論理式のモデルとなるのはどれか答えよ.

- (1) $\exists x \forall y (x \leq y) \wedge \exists x \forall y (y \leq x)$
- (2) $\exists x \exists y (\neg(x \leq y) \wedge \neg(y \leq x))$
- (3) $\exists x \forall y (x \leq y \vee y \leq x \rightarrow x \approx y)$
- (4) $\forall x \forall y \forall z (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \approx y \vee y \approx z)$



(ア)



(イ)



(ウ)



(エ)

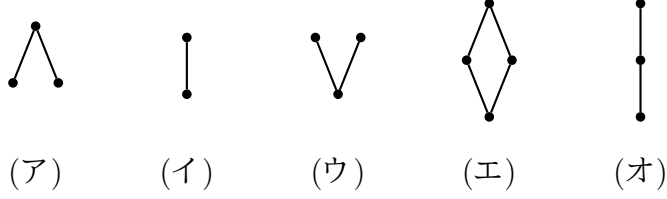


(オ)



(カ)

問題 6 ハッセ図 (ア)～(オ) を以下のようにおく.



このときそれぞれのハッセ図で表わされる半順序集合の L -構造のうち、このうち、以下のそれぞれの述語論理式について、モデルとなっているものを全て挙げよ.

- (1) $\exists x \forall y (x \leq y)$
- (2) $\exists x \forall y (x \leq y) \rightarrow \exists x \forall y (y \leq x)$
- (3) $\forall x (\neg \exists y (x < y) \vee \neg \exists y (y < x))$

問題 7 シグニチャを $L = \langle \emptyset, \{P^2\} \rangle$ とするとき, L -構造 $\mathcal{M}_i = \langle |\mathcal{M}_i|, P^{\mathcal{M}_i} \rangle$ ($1 \leq i \leq 5$) を以下のように定める.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \langle \mathbb{Z}, \{\langle x, y \rangle \mid x < y\} \rangle \\ \mathcal{M}_2 &= \langle \mathbb{N}, \{\langle x, y \rangle \mid x \leq y\} \rangle \\ \mathcal{M}_3 &= \langle \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}, \{\langle x, y \rangle \mid x + y = 2\} \rangle \\ \mathcal{M}_4 &= \langle \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ は素数}, n \geq 5\}, \{\langle x, y \rangle \mid x \times y \neq 0\} \rangle \\ \mathcal{M}_5 &= \langle \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \{\langle x, y \rangle \mid x \neq y\} \rangle \end{aligned}$$

以下の (1)～(4) の述語論理式それぞれについて, $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_5$ のうちでそのモデルとなっている L -構造をすべて挙げよ.

- (1) $\exists x \exists y P(x, y)$
- (2) $\exists x \forall y P(x, y)$
- (3) $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$
- (4) $\exists x (P(x, x) \rightarrow \forall y P(x, y))$

2019年度 数理論理学 復習問題解答 (18)

問題 1 任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と, L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について, $\llbracket \forall x \forall y (P(x) \wedge x \approx y \rightarrow P(y)) \rrbracket_v = T$ となることを示す.

$\mathcal{M}$ を L -構造, v を $\mathcal{M}$ への付値とする.

このとき, 解釈の定義より, 任意の $a, b \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket P(x) \wedge x \approx y \rightarrow P(y) \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = T$, つまり, $\llbracket P(x) \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = \llbracket x \approx y \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = T$ となるならば, $\llbracket P(y) \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = T$ となることを示せばよい.

$\llbracket P(x) \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = \llbracket x \approx y \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = T$ と仮定する. このとき, $\llbracket P(x) \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = T$ より, $a \in P^{\mathcal{M}}$ が成立する. また, $\llbracket x \approx y \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = T$ より, $a = \llbracket x \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = \llbracket y \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = b$ が成立する. よって, $b \in P^{\mathcal{M}}$. したがって, 解釈の定義より, $\llbracket P(y) \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = T$. 以上より, $\llbracket \forall x \forall y (P(x) \wedge x \approx y \rightarrow P(y)) \rrbracket_v = T$ が成立する. $\square$

問題 2 任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と, L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について, $\llbracket \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \rrbracket_v = T$ となることを示す.

$\mathcal{M}$ を L -構造, v を $\mathcal{M}$ への付値とする.

このとき, $\llbracket \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \rrbracket_v = T$ ならば, $\llbracket \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \rrbracket_v = T$ となることを示せばよい.

$\llbracket \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \rrbracket_v = T$ と仮定する. このとき, 解釈の定義から, 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket P(x) \wedge Q(x) \rrbracket_{v[a/x]} = T$, つまり, $a \in P^{\mathcal{M}}$ かつ $a \in Q^{\mathcal{M}}$ が成立する. よって, $P^{\mathcal{M}} = Q^{\mathcal{M}} = |\mathcal{M}|$ が成立する.

したがって, 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について $\llbracket P(x) \rrbracket_{v[a/x]} = T$ となるので, $\llbracket \forall x P(x) \rrbracket_v = T$ となる. また, 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について $\llbracket Q(x) \rrbracket_{v[a/x]} = T$ となるので, $\llbracket \forall x Q(x) \rrbracket_v = T$ も成立する.

よって, $\llbracket \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \rrbracket_v = T$ が成立する.

以上より, $\llbracket \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \rrbracket_v = T$ が成立する. $\square$

問題 3

(1) 解答例

L -構造として $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, P^{\mathcal{M}}, Q^{\mathcal{M}} \rangle$, $P^{\mathcal{M}} = \{0\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{1\}$ をとる. このとき, $\llbracket P(x) \rrbracket_{v[1/x]} = F$ より $\llbracket \forall x P(x) \rrbracket_v = F$. $\llbracket Q(x) \rrbracket_{v[0/x]} = F$ より $\llbracket \forall x Q(x) \rrbracket_v = F$. 一方, $\llbracket P(x) \rrbracket_{v[0/x]} = T$ より $\llbracket P(x) \vee Q(x) \rrbracket_{v[0/x]} = T$, また, $\llbracket Q(x) \rrbracket_{v[1/x]} = T$ より $\llbracket P(x) \vee Q(x) \rrbracket_{v[1/x]} = T$. よって, $\llbracket \forall x (P(x) \vee Q(x)) \rrbracket_v = T$ となる. よって, $\llbracket \forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \rrbracket_{\mathcal{M}} = F$ となり, $\mathcal{M}$ は与式の反例.

(2) 解答例

L -構造 $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{M}} \rangle$, $P^{\mathcal{M}} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ をとる. すると, $\llbracket P(x) \rrbracket_{v[0/x]} = T$ より $\llbracket \exists x P(x) \rrbracket_v = T$. 一方, $\llbracket P(x) \rrbracket_{v[1/x]} = F$ より $\llbracket \forall x P(x) \rrbracket_v = F$. よって, $\llbracket \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x) \rrbracket_v = F$. 以上より, $\llbracket \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x) \rrbracket_{\mathcal{M}} = F$ となり, $\mathcal{M}$ は与式の反例.

(3) 解答例

L -構造として $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{M}} \rangle$, $P^{\mathcal{M}} = \{\langle n, n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ をとる. すると, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $\langle n, n \rangle \in P^{\mathcal{M}}$ より $\llbracket P(x, x) \rrbracket_{v[n/x]} = T$. よって, $\llbracket \forall x P(x, x) \rrbracket_v = T$. 一方, $\llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[0/x][1/y]} = F$ であるから, $\llbracket \forall z P(x, z) \rrbracket_{v[0/x]} = F$ となる. 従っ

て, $\llbracket \forall y \forall z P(y, z) \rrbracket_v = F$. 以上より, $\llbracket \forall x P(x, x) \rightarrow \forall y \forall z P(y, z) \rrbracket_v = F$. よって, $\llbracket \forall x P(x, x) \rightarrow \forall y \forall z P(y, z) \rrbracket_{\mathcal{M}} = F$ となり, $\mathcal{M}$ は与式の反例.

問題 4

(1) 解答例

L -構造として, $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, P^{\mathcal{M}} \rangle$, $P^{\mathcal{M}} = \{0\}$ をとる. このとき, $\llbracket P(x) \rrbracket_{v[1/x]} = F$ より, $\llbracket \forall x P(x) \rrbracket_v = F$. よって, $\llbracket \forall x P(x) \rrbracket_{\mathcal{M}} = F$ となり, $\mathcal{M}$ は与式の反例.

(2) 解答例

L -構造として, $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, P^{\mathcal{M}}, Q^{\mathcal{M}} \rangle$, $P^{\mathcal{M}} = \{0\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{0, 1\}$ をとる. このとき, $P^{\mathcal{M}} \subseteq Q^{\mathcal{M}}$ より, $\llbracket \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rrbracket_v = T$ となる. また, このとき, $\llbracket Q(x) \rrbracket_{v[2/x]} = F$ より, $\llbracket \forall x Q(x) \rrbracket_v = F$. よって, $\llbracket \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \forall x Q(x) \rrbracket_v = F$. 以上より, $\llbracket \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \forall x Q(x) \rrbracket_{\mathcal{M}} = F$ となり, $\mathcal{M}$ は与式の反例.

(3) 解答例

L -構造として, $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{M}} \rangle$, $P^{\mathcal{M}} = <$ をとる. $\mathbb{N}$ 上で, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $m = n + 1 \in \mathbb{N}$ が存在して $\llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[n/x][m/y]} = T$ となる. よって, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\llbracket \exists y P(x, y) \rrbracket_{v[n/x]} = T$. 従って, $\llbracket \forall x \exists y P(x, y) \rrbracket_v = T$. 一方, $0 < 0$ とはならないので, $\llbracket P(x, x) \rrbracket_{v[0/x]} = F$. よって, $\llbracket \exists x P(x, x) \rrbracket_v = F$. 以上より, $\llbracket \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x P(x, x) \rrbracket_v = F$. よって, $\llbracket \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x P(x, x) \rrbracket_{\mathcal{M}} = F$ となり, $\mathcal{M}$ は与式の反例.

問題 5

- (1) エ, カ
- (2) ア, イ, ウ, エ, オ
- (3) イ
- (4) ア, イ, オ

問題 6

- (1) イ, ウ, エ, オ
- (2) ア, イ, エ, オ
- (3) ア, イ, ウ

問題 7

- (1) $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4, \mathcal{M}_5$
- (2) $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_4$
- (3) $\mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4, \mathcal{M}_5$
- (4) $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_4, \mathcal{M}_5$