2020年度 数理論理学 復習問題 (8)

問題 1 任意の命題論理式 A について，$d(A) \geq 0$ となることを帰納法を用いて証明せよ．ただし，$d(A)$ は，講義資料中で与えたように，命題論理式 A の深さを表わすものとする．

問題 2 命題変数/定数の個数 $l(A)$ を以下のように定義する．

$$l(A) = \begin{cases} 1 & (A \text{ が命題変数，または } A \in \{\top, \bot\} \text{ のとき}) \\ l(B) & (A = \neg B \text{ のとき}) \\ l(B) + l(C) & (A = B \wedge C\text{，または } A = B \vee C\text{，} A = B \to C\text{，} \\ & \quad A = B \leftrightarrow C \text{ のとき}) \end{cases}$$

また，2項命題結合子の個数 $b(A)$ を以下のように定義する．

$$b(A) = \begin{cases} 0 & (A \text{ が命題変数，または } A \in \{\top, \bot\} \text{ のとき}) \\ b(B) & (A = \neg B \text{ のとき}) \\ b(B) + b(C) + 1 & (A = B \wedge C\text{，または } A = B \vee C\text{，} A = B \to C\text{，} \\ & \quad A = B \leftrightarrow C \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，任意の命題論理式 A について，$l(A) = b(A) + 1$ が成立することを示せ．

問題 3 命題論理式の変換 t を以下のように定義する．

$$\begin{array}{lcllcl} t(P) & = & \neg P & t(B \wedge C) & = & t(B) \vee t(C) \\ t(\bot) & = & \top & t(B \vee C) & = & t(B) \wedge t(C) \\ t(\top) & = & \bot & t(B \to C) & = & t(C) \to t(B) \\ t(\neg B) & = & \neg t(B) & t(B \leftrightarrow C) & = & t(B) \leftrightarrow t(C) \end{array}$$

だたし，ここで，P は命題変数を表わすとする．このとき，

(1) $t(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})$，$t(t(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}))$ を求めよ．

(2) 任意の命題論理式 A について $t(t(A)) \cong A$ となることを，命題論理式 A に関する帰納法を用いて証明せよ．

問題 4 $|\mathrm{Sub}(A)| \leq 2\,c(A) + 1$，つまり，命題論理式 A の部分論理式の個数は高々 $2\,c(A) + 1$ 個となることを示せ．

問題 5 v を付値とするとき，命題論理式の変換 t_v を以下のように定義する．

$$t_v(A) = \begin{cases} \top & (A \text{ が命題変数，} v(A) = \mathrm{T} \text{ のとき}) \\ \bot & (A \text{ が命題変数，} v(A) = \mathrm{F} \text{ のとき}) \\ A & (A \in \{\bot, \top\} \text{ のとき}) \\ \neg\, t_v(B) & (A = \neg B \text{ のとき}) \\ t_v(B) \circ t_v(C) & (A = B \circ C\text{，} \circ \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) 付値 v_0 を

$$v_0(\mathtt{P}_i) = \begin{cases} \mathrm{T} & (i \text{ が偶数のとき}) \\ \mathrm{F} & (i \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

により定義する．このとき，$t_{v_0}((\neg \mathtt{P}_0) \to \mathtt{P}_1)$ を求めよ．

(2) 任意の命題論理式 A について，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$ ならば $t_v(A) \cong \top$，$[\![A]\!]_v = \mathrm{F}$ ならば $t_v(A) \cong \bot$ となることを命題論理式 A に関する帰納法を用いて証明せよ．

2020 年度 数理論理学 復習問題解答 (8)

問題 1 命題論理式 A に関する帰納法で示す.
1. A が命題変数のとき.
$d(A)$ の定義から，$d(A) = 0$．よって，$d(A) \geq 0$.
2. $A = \top$ または $A = \bot$ のとき.
$d(A)$ の定義から，$d(A) = 0$．よって，$d(A) \geq 0$.
3. $A = \neg B$ のとき.
$d(A)$ の定義から，$d(A) = d(B) + 1$.
帰納法の仮定より，$d(B) \geq 0$.
よって，$d(A) \geq 0$.
4. $A = B \wedge C$ または $A = B \vee C$，$A = B \to C$，$A = B \leftrightarrow C$ のとき.
$d(A)$ の定義から，$d(A) = \max\{d(B), d(C)\} + 1$.
帰納法の仮定より，$d(B) \geq 0$.
よって，$d(A) \geq 0$. □

問題 2 命題論理式 A に関する帰納法で示す.
1. A が命題変数，または，$A = \top$，$A = \bot$ のとき.
定義から，$l(A) = 1$，$b(A) = 0$．よって，$l(A) = 1 = b(A) + 1$.
2. $A = \neg B$ のとき.
$l(A)$ の定義から，$l(A) = l(B)$.
$b(A)$ の定義から，$b(A) = b(B)$.
帰納法の仮定より，$l(B) = b(B) + 1$.
よって，$l(A) = b(A) + 1$.
4. $A = B \wedge C$ または $A = B \vee C$，$A = B \to C$，$A = B \leftrightarrow C$ のとき.
$l(A)$ の定義から，$l(A) = l(B) + l(C)$.
$b(A)$ の定義から，$b(A) = b(B) + b(C) + 1$.
帰納法の仮定より，$l(B) = b(B) + 1$，$l(C) = b(C) + 1$.
よって，$l(A) = l(B) + l(C) = (b(B) + 1) + (b(C) + 1) = (b(B) + b(C) + 1) + 1 = b(A) + 1$.

□

問題 3 (1) $t((\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})) = t(\mathtt{P}) \vee t(\mathtt{Q}) = (\neg\mathtt{P}) \vee (\neg\mathtt{Q})$
$t(t((\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}))) = t((\neg\mathtt{P}) \vee (\neg\mathtt{Q})) = t(\neg\mathtt{P}) \wedge t(\neg\mathtt{Q}) = \neg(\neg\mathtt{P}) \wedge \neg(\neg\mathtt{Q})$
(2) 命題論理式 A に関する帰納法で示す.
1. A が命題変数の場合.
$t(t(A)) = \neg\neg A \cong A$ より成立.
2. $A = \bot$ の場合.
$t(t(A)) = t(\top) \cong \bot \cong A$ より成立.
3. $A = \top$ の場合.
$t(t(A)) = t(\bot) \cong \top \cong A$ より成立.
4. $A = \neg B$ の場合.
帰納法の仮定から，$t(t(B)) \cong B$.

よって，$t(t(A)) = t(t(\neg B)) = t(\neg t(B)) = \neg t(t(B)) \cong \neg B = A$.
5. $A = B \wedge C$ の場合.
帰納法の仮定から，$t(t(B)) \cong B$，$t(t(C)) \cong C$.
よって，$t(t(A)) = t(t(B) \wedge t(C)) = t(t(B)) \wedge t(t(C)) \cong B \wedge C = A$ より成立.
6. $A = B \wedge C$ の場合.
帰納法の仮定から，$t(t(B)) \cong B$，$t(t(C)) \cong C$.
よって，$t(t(A)) = t(t(B) \wedge t(C)) = t(t(B)) \wedge t(t(C)) \cong B \wedge C = A$ より成立.
7. $A = B \to C$ の場合.
帰納法の仮定から，$t(t(B)) \cong B$，$t(t(C)) \cong C$.
よって，$t(t(A)) = t(t(C) \to t(B)) = t(t(C)) \to t(t(B)) \cong B \to C = A$ より成立.
8. $A = B \leftrightarrow C$ の場合.
帰納法の仮定から，$t(t(B)) \cong B$，$t(t(C)) \cong C$.
よって，$t(t(A)) = t(t(B) \leftrightarrow t(C)) = t(t(B)) \leftrightarrow t(t(C)) \cong B \leftrightarrow C = A$ より成立.
$\square$

問題 4 命題論理式 A に関する帰納法により証明を行う．以下では A の部分論理式の個数を $s(A)$ とおく.
1. A が命題変数のとき.
このとき $\mathrm{Sub}(A) = \{A\}$ より $s(A) = 1$. 一方，$c(A) = 0$ より，$2c(A) + 1 = 1$. ゆえに，$s(A) \leq 2c(A) + 1$.
2. $A = \top$ または $A = \bot$ のとき.
このとき $\mathrm{Sub}(A) = \{A\}$ より $s(A) = 1$. 一方，$c(A) = 1$ より，$2c(A) + 1 = 3$. ゆえに，$s(A) \leq 2c(A) + 1$.
3. $A = \neg B$ のとき.
このとき $\mathrm{Sub}(A) = \mathrm{Sub}(B) \cup \{A\}$. よって，$s(A) \leq s(B) + 1$. 帰納法の仮定より $s(B) \leq 2c(B) + 1$. ゆえに，$s(A) \leq s(B) + 1 \leq 2c(B) + 2 = 2(c(B) + 1) = 2c(A) \leq 2c(A) + 1$.
4. $A = B \wedge C$，または，$A = B \vee C$，$A = B \to C$，$A = B \leftrightarrow C$ のとき.
このとき $\mathrm{Sub}(A) = \mathrm{Sub}(B) \cup \mathrm{Sub}(C) \cup \{A\}$. よって，$s(A) \leq s(B) + s(C) + 1$. 帰納法の仮定より $s(B) \leq 2c(B) + 1$，$s(C) \leq 2c(C) + 1$. $s(A) \leq s(B) + s(C) + 1 \leq (2c(B) + 1) + (2c(C) + 1) + 1 \leq 2(c(B) + c(C) + 1) + 1 \leq 2c(A) + 1$. $\square$

問題 5 (1)

$$\begin{aligned} t_{v_0}((\neg \mathtt{P}_0) \to \mathtt{P}_1) &= t_{v_0}(\neg \mathtt{P}_0) \to t_{v_0}(\mathtt{P}_1) \\ &= \neg(t_{v_0}(\mathtt{P}_0)) \to t_{v_0}(\mathtt{P}_1) \\ &= \neg \top \to \bot \end{aligned}$$

(2) (i) $[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$ ならば $t_v(A) \cong \top$，(ii)$[\![A]\!]_v = \mathrm{F}$ ならば $t_v(A) \cong \bot$ となることを命題論理式 A に関する帰納法を用いて示す.

1. A が命題変数の場合．(i) $[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$ と仮定する．すると，解釈の定義より $v(A) = \mathrm{T}$. よって，t_v の定義より，$t_v(A) = \top$. 従って，$t_v(A) \cong \top$ が成立する．(ii) $[\![A]\!]_v = \mathrm{F}$ と仮定する．すると，解釈の定義より $v(A) = \mathrm{F}$. よって，t_v の定義より，$t_v(A) = \bot$. 従って，$t_v(A) \cong \bot$ が成立する.

2. $A = \top$ の場合．t_v の定義より，$t_v(A) = \top$．よって，$t_v(A) \cong \top$ なので，(i) が成立．一方，$[\![\top]\!]_v = \mathrm{T}$ より，(ii) の前提部分は成立しないので，(ii) も成立する．

3. $A = \bot$ の場合．t_v の定義より，$t_v(A) = \bot$．よって，$t_v(A) \cong \bot$ なので，(ii) が成立．一方，$[\![\bot]\!]_v = \mathrm{F}$ より，(i) の前提部分は成立しないので，(i) も成立する．

4. $A = \neg B$ の場合．(i) $[\![\neg B]\!]_v = \mathrm{T}$ と仮定する．このとき，解釈の定義より $[\![B]\!]_v = \mathrm{F}$．ゆえに，帰納法の仮定より，$t_v(B) \cong \bot$．従って，$t_v(\neg B) = \neg t_v(B) \cong \neg\bot \cong \top$．(ii) $[\![\neg B]\!]_v = \mathrm{F}$ と仮定する．このとき，解釈の定義より $[\![B]\!]_v = \mathrm{T}$．ゆえに，帰納法の仮定より，$t_v(B) \cong \top$．従って，$t_v(\neg B) = \neg t_v(B) \cong \neg\top \cong \bot$.

5. $A = B \wedge C$ の場合．(i) $[\![B \wedge C]\!]_v = \mathrm{T}$ と仮定する．このとき，解釈の定義より $[\![B]\!]_v = [\![C]\!]_v = \mathrm{T}$．ゆえに，帰納法の仮定より，$t_v(B) \cong \top$ かつ $t_v(C) \cong \top$．従って，$t_v(B \wedge C) = t_v(B) \wedge t_v(C) \cong \top \wedge \top \cong \top$．(ii) $[\![B \wedge C]\!]_v = \mathrm{F}$ と仮定する．このとき，解釈の定義より $[\![B]\!]_v = \mathrm{F}$ または $[\![C]\!]_v = \mathrm{F}$．$[\![B]\!]_v = \mathrm{F}$ の場合は，帰納法の仮定より $t_v(B) \cong \bot$ となり，$t_v(B \wedge C) = t_v(B) \wedge t_v(C) \cong \bot \wedge t_v(C) \cong \bot$．$[\![C]\!]_v = \mathrm{F}$ の場合も，帰納法の仮定より $t_v(C) \cong \bot$ となり，$t_v(B \wedge C) = t_v(B) \wedge t_v(C) \cong t_v(B) \wedge \bot \cong \bot$ となる．

6. $A = B \vee C$ の場合．(i) $[\![B \vee C]\!]_v = \mathrm{T}$ と仮定する．このとき，解釈の定義より $[\![B]\!]_v = \mathrm{T}$ または $[\![C]\!]_v = \mathrm{T}$．$[\![B]\!]_v = \mathrm{T}$ の場合は，帰納法の仮定より $t_v(B) \cong \top$ となり，$t_v(B \vee C) = t_v(B) \vee t_v(C) \cong \top \vee t_v(C) \cong \top$．$[\![C]\!]_v = \mathrm{T}$ の場合も，帰納法の仮定より $t_v(C) \cong \top$ となり，$t_v(B \vee C) = t_v(B) \vee t_v(C) \cong t_v(B) \vee \top \cong \top$ となる．(ii) $[\![B \vee C]\!]_v = \mathrm{F}$ と仮定する．このとき，解釈の定義より $[\![B]\!]_v = [\![C]\!]_v = \mathrm{F}$．ゆえに，帰納法の仮定より，$t_v(B) \cong \bot$ かつ $t_v(C) \cong \bot$．従って，$t_v(B \vee C) = t_v(B) \vee t_v(C) \cong \bot \vee \bot \cong \bot$.

7. $A = B \to C$ の場合．(i) $[\![B \to C]\!]_v = \mathrm{T}$ と仮定する．このとき，解釈の定義より $[\![B]\!]_v = \mathrm{F}$ または $[\![C]\!]_v = \mathrm{T}$．$[\![B]\!]_v = \mathrm{F}$ の場合は，帰納法の仮定より $t_v(B) \cong \bot$ となり，$t_v(B \to C) = t_v(B) \to t_v(C) \cong \bot \to t_v(C) \cong \top$．$[\![C]\!]_v = \mathrm{T}$ の場合も，帰納法の仮定より $t_v(C) \cong \top$ となり，$t_v(B \to C) = t_v(B) \to t_v(C) \cong t_v(B) \to \top \cong \top$ となる．(ii) $[\![B \to C]\!]_v = \mathrm{F}$ と仮定する．このとき，解釈の定義より $[\![B]\!]_v = \mathrm{T}$ かつ $[\![C]\!]_v = \mathrm{F}$．ゆえに，帰納法の仮定より，$t_v(B) \cong \top$ かつ $t_v(C) \cong \bot$．従って，$t_v(B \to C) = t_v(B) \to t_v(C) \cong \top \to \bot \cong \bot$.

8. $A = B \leftrightarrow C$ の場合．(i) $[\![B \leftrightarrow C]\!]_v = \mathrm{T}$ と仮定する．このとき，解釈の定義より $[\![B]\!]_v = [\![C]\!]_v = \mathrm{T}$ または $[\![B]\!]_v = [\![C]\!]_v = \mathrm{F}$．$[\![B]\!]_v = [\![C]\!]_v = \mathrm{T}$ の場合は，帰納法の仮定より，$t_v(B) \cong \top$，$t_v(C) \cong \top$ となり，$t_v(B \leftrightarrow C) = t_v(B) \leftrightarrow t_v(C) \cong \top \leftrightarrow \top \cong \top$．$[\![B]\!]_v = [\![C]\!]_v = \mathrm{F}$ の場合も，帰納法の仮定より，$t_v(B) \cong \bot$，$t_v(C) \cong \bot$ となり，$t_v(B \leftrightarrow C) = t_v(B) \leftrightarrow t_v(C) \cong \bot \leftrightarrow \bot \cong \top$．(ii) $[\![B \leftrightarrow C]\!]_v = \mathrm{F}$ と仮定する．このとき，解釈の定義より (a) $[\![B]\!]_v = \mathrm{T}$ かつ $[\![C]\!]_v = \mathrm{F}$，または，(b) $[\![B]\!]_v = \mathrm{F}$ かつ $[\![C]\!]_v = \mathrm{T}$．(a) の場合，帰納法の

仮定より，$t_v(B) \cong \top$，$t_v(C) \cong \bot$ となり，$t_v(B \leftrightarrow C) = t_v(B) \leftrightarrow t_v(C) \cong \top \leftrightarrow \bot \cong \bot$．(b) の場合も，帰納法の仮定より，$t_v(B) \cong \bot$，$t_v(C) \cong \top$ となるから，$t_v(B \leftrightarrow C) = t_v(B) \leftrightarrow t_v(C) \cong \bot \leftrightarrow \top \cong \bot$． $\square$

注意．2 つの性質 (i) と (ii) を別々に帰納法で示そうとすると，帰納法の仮定だけでは命題が導けないので，うまくいかない．(このような状況をさして，「帰納法がかからない」という．)

このように複数の性質を同時に示すことや，もともとも証明したい命題より一般的な命題を示すことが，帰納法による証明がうまくいく鍵となる場合がよくある．