2020年度 数理論理学
講義資料(13)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

自然演繹体系(1): $\forall$の推論

述語論理の自然演繹体系は，命題論理の自然演繹体系に$\forall, \exists$のそれぞれについての導入規則，除去規則，等号に関する推論規則を追加することによって得られる．

(11) $\forall$の導入

$$\dfrac{\overset{\vdots}{A}}{\forall x\, A}\,\forall\mathrm{I}$$

ただし，xが自由に出現する仮定は，全て除去されているとする．

(12) $\forall$の除去

$$\dfrac{\overset{\vdots}{\forall x\, A}}{[x := t](A)}\,\forall\mathrm{E}$$

ここで，tは任意の項を表す．

$\forall$の除去規則の適用例と注意

$\forall$の除去規則の適用例.

(1)

$$\dfrac{\overset{\vdots}{\forall x\, (x \approx x)}}{0 \approx 0}\,\forall\mathrm{E}$$

(2)

$$\dfrac{\overset{\vdots}{\forall x\, (0 \approx x \times 0)}}{0 \approx s(0) \times 0}\,\forall\mathrm{E}$$

$\forall$の除去規則は，$\forall x\, A$が成立していれば，Aのxのところに何を代入しても成立する，という推論．これは，$\forall x\, A$の意味を考えると，自然な推論．

$\forall$の除去規則の適用する際の注意.

推論規則の結論部 $[x := t](A)$ では，代入を実行している．このため，代入に関する注意事項を思い出すこと．

演習 13.1. 以下の$\forall\mathrm{E}$の適用例が正しいかどうか述べよ．

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x, y)}}{\forall y\, P(0, y)}\,\forall\mathrm{E}}{P(0, 0)}\,\forall\mathrm{E} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x, y)}}{\forall y\, P(x, y)}\,\forall\mathrm{E}}{P(x, y)}\,\forall\mathrm{E} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x, y)}}{\forall y\, P(z, y)}\,\forall\mathrm{E}}{P(z, z)}\,\forall\mathrm{E}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x, y)}}{\forall y\, P(x, y)}\,\forall\mathrm{E}}{P(x, x)}\,\forall\mathrm{E} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x, y)}}{\forall y\, P(y, y)}\,\forall\mathrm{E}}{P(y, y)}\,\forall\mathrm{E} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x, y)}}{\forall z\, P(y, z)}\,\forall\mathrm{E}}{P(y, y)}\,\forall\mathrm{E}$$

$\forall$の導入規則の適用例と 注意

$\forall$の導入規則の適用例.

$$\dfrac{\overset{\vdots}{x \times 1 \approx x}}{\forall x\, (x \times 1 \approx x)}\,\forall\mathrm{I}$$

ただし，このような推論が成立するのは，xに関する仮定が何もされていない時のみ．

推論規則の条件
「xが自由に出現する仮定は，全て除去されているとする」

はこれを保証する．

$\forall$の導入規則の正しくない適用例.

$$\dfrac{\overset{\overset{[x \approx 0]}{\vdots}}{x \times 1 \approx 0}}{\forall x\, (x \times 1 \approx 0)}\,\forall\mathrm{I}$$

この場合，除去されていない仮定$[x \approx 0]$のなかに，変数xの自由な出現があるのでダメ．もしこのようなことを許したとすると，$\forall\mathrm{E}$規則と合わせて，

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\overset{[x \approx 0]}{\vdots}}{x \times 1 \approx 0}}{\forall x\, (x \times 1 \approx 0)}\,\forall\mathrm{I}}{1 \times 1 \approx 0}\,\forall\mathrm{E}$$

のような証明が出来てしまうため，明らかにおかしい．

演習 13.2. 以下の$\forall\mathrm{I}$の適用例が正しいかどうか述べよ．

$$\dfrac{\dfrac{[\forall y\, (P(x) \land Q(y))]}{P(x) \land Q(z)}\,\forall\mathrm{E}}{\forall x\, (P(x) \land Q(z))}\,\forall\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall y\, (P(x) \land Q(y))]}{P(x) \land Q(z)}\,\forall\mathrm{E}}{\forall z\, (P(x) \land Q(z))}\,\forall\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall y\, (P(x) \land Q(y))]}{P(x) \land Q(z)}\,\forall\mathrm{E}}{\forall y\, (P(x) \land Q(z))}\,\forall\mathrm{I}$$

$$\dfrac{\dfrac{[\forall y\, (P(x) \land Q(y))]}{P(x) \land Q(x)}\,\forall\mathrm{E}}{\forall x\, (P(x) \land Q(x))}\,\forall\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall y\, (P(y) \land Q(y))]}{P(x) \land Q(x)}\,\forall\mathrm{E}}{\forall x\, (P(x) \land Q(x))}\,\forall\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall y\, (P(y) \land Q(y))]}{P(y) \land Q(y)}\,\forall\mathrm{E}}{\forall y\, (P(y) \land Q(y))}\,\forall\mathrm{I}$$

$\forall$I, $\forall$Eを用いた証明図の例.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x \forall y\, P(x,y)]^1}{\forall y\, P(x,y)}\,\forall E}{P(x,y)}\,\forall E}{\forall x\, P(x,y)}\,\forall I}{\forall y \forall x\, P(x,y)}\,\forall I}{\forall x\forall y\, P(x,y) \to \forall y\forall x\, P(x,y)}\,{\to}I^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\, P(x)]^1}{P(y)}\,\forall E}{\forall y\, P(y)}\,\forall I}{\forall x\, P(x) \to \forall y\, P(y)}\,{\to}I^1$$

演習 13.3. 以下の証明図は正しいか? 正しくないなら，どこが誤っている推論ステップが指摘せよ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\, P(x,x)]^1}{P(y,z)}\,\forall E}{\forall z\, P(y,z)}\,\forall I}{\forall y\forall z\, P(y,z)}\,\forall I}{\forall x\, P(x,x) \to \forall y \forall z\, P(y,z)}\,{\to}I^1$$

演習 13.4. $\forall y\, P(y) \land \forall z\, Q(z) \to \forall x\, (P(x) \land Q(x))$の省略されている括弧を補え．また，その証明図を書け.

$(((\forall y\, P(y)) \land (\forall z\, Q(z))) \to (\forall x\, (P(x) \land Q(x))))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall y\, P(y) \land \forall z\, Q(z)]^1}{\forall y\, P(y)}\,\land E}{P(x)}\,\forall E \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall y\, P(y) \land \forall z\, Q(z)]^1}{\forall z\, Q(z)}\,\land E}{Q(x)}\,\forall E}{P(x) \land Q(x)}\,\land I}{\forall x\, (P(x) \land Q(x))}\,\forall I}{\forall y\, P(y) \land \forall z\, Q(z) \to \forall x\, (P(x) \land Q(x))}\,{\to}I^1$$

まとめ

- 述語論理の自然演繹体系 **(1)**
  - $\forall$の導入規則と除去規則
  - $\forall$の導入規則における変数条件