

2020年度 数理論理学

講義資料(14)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

演習 14.1. 以下の $\exists$ Iの適用例が正しいかどうか述べよ.

$$\begin{array}{ccc} \frac{\frac{P(0,0)}{\exists y P(0,y)} \exists I}{\exists x \exists y P(x,y)} \exists I & \frac{\frac{P(x,y)}{\exists y P(x,y)} \exists I}{\exists x \exists y P(x,y)} \exists I & \frac{P(z,z)}{\exists x P(x,x)} \exists I \\ \frac{P(x,y)}{\exists z P(z,z)} \exists I & \frac{P(z,z)}{\exists y P(z,y)} \exists I & \frac{P(y,y)}{\exists z P(y,z)} \exists I \\ \frac{}{\exists x \exists y P(x,y)} \exists I & \frac{}{\exists x \exists y P(x,y)} \exists I & \frac{}{\exists x \exists y P(x,y)} \exists I \end{array}$$

3/21

目次

- 述語論理の自然演繹体系(2): $\exists$ の推論
- 述語論理の自然演繹体系: $\forall$ と $\exists$ の推論の演習
- 述語論理の自然演繹体系(3): 等号に関する推論

$\exists$ の除去規則の適用例と注意

$\exists$ の除去規則の直観的な説明

$\exists x A(x) = A(0) \vee A(1) \vee \dots$ と考えると

$$\frac{\frac{[A(0)]^i}{\exists x A(x)} \exists I \quad \frac{[A(1)]^i}{C} \exists E}{C} \dots$$

は $\vee$ の除去規則に似ている.

また, このとき, C は $0, 1, \dots$ によらない論理式になっていることに注意する.

4/21

自然演繹体系(2): $\exists$ の推論

(13) $\exists$ の導入

$$\frac{[x := t](A)}{\exists x A} \exists I$$

ここで, t は任意の項を表す.

(14) $\exists$ の除去

$$\frac{[x := z](A) \quad \frac{\exists x A \quad C}{C} \exists E}{C} \exists E^i$$

ただし, z は C , $\exists x A$ に自由に出現しない変数で, 右側の証明図で, 除去される仮定 $[x := z](A)$ 以外の, 変数 z が自由に出現する仮定は全て除去されてしまうものとする.

1/21

しかし, 全ての $0, 1, \dots$ について証明するわけにはいかないので, 全く新しい変数 z で代表させると,

$$\frac{\frac{[A(z)]^i}{\exists x A(x)} \exists I \quad \frac{[A(z)]^i}{C} \exists E}{C} \dots$$

推論規則の条件「変数 z は, $\exists x A(x)$ や C , および, 右側の証明図内の, (直後に除去される) $[A(z)]$ 以外の除去されていない仮定のなかで, 自由変数として表われてはいけ

ない」は, 変数 z が $(0, 1, \dots)$ を代表して用いられている)全く新しい変数ということを保証する条件になっている.

5/21

$\exists$ の導入規則の適用例と注意

$\exists$ の導入規則の適用例.

$$\frac{3 \times 3 \approx 9}{\exists x (x \times x \approx 9)} \exists I \quad \frac{3 \times 3 \approx 9}{\exists x (x \times 3 \approx 9)} \exists I$$

$\forall E$ の場合(上式の論理式に代入したのが下式)とは逆に, 下式に代入をして上式が得られていることに注意.

(上から下へ考えると)述語論理式 A の(共通の)項を変数に置き替えてもよいことになる. このため, 同じ上式であっても, $\exists I$ 規則の適用によって得られる下式は一般に複数ある.

2/21

証明図の例.

$$\frac{\frac{[P(z)]^1}{\exists x P(x)} \exists I \quad \frac{[P(z)]^1}{\exists y P(y)} \exists I}{\exists x P(x) \rightarrow \exists y P(y)} \rightarrow I^2$$

$$\frac{\frac{[P(y,y)]^1}{\exists z P(y,z)} \exists I \quad \frac{[P(y,y)]^1}{\exists y \exists z P(y,z)} \exists I}{\exists x P(x) \rightarrow \exists y \exists z P(y,z)} \rightarrow I^2$$

上の証明図の場合, $[P(z)]^1$ のところは $[P(y)]^1$ などでもよい. 下の証明図の場合, $[P(y,y)]^1$ のところは, $[P(x,x)]^1$ などでもよいが, その下の論理式も合わせて変更が必要.

6/21

∃の除去規則の変数条件

演習 14.2. 以下の証明図の間違いを指摘せよ.

$$\frac{\frac{\frac{[P(z) \rightarrow Q(z)]^2 \quad [P(z)]^1}{Q(z)} \rightarrow E \quad \frac{[\exists x P(x)]^3}{\exists x Q(x)} \exists I \quad \frac{[\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))]^4}{\exists x Q(x)} \exists E^1}{\frac{\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)}{\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)} \rightarrow I^3} \exists E^2 \rightarrow I^4$$

7/21

解答: 1番上の $\exists E^1$ の推論がおかしい.

1番上の $\exists E^1$ を適用したときを考えると,

$$\frac{\frac{[P(z) \rightarrow Q(z)] \quad [P(z)]^1}{Q(z)} \rightarrow E \quad \frac{[\exists x P(x)] \quad \exists x Q(x)}{\exists x Q(x)} \exists E^1$$

変数 z が除去されない仮定 $[P(z) \rightarrow Q(z)]$ に現われるのでおかしい. このように, 変数条件はその推論規則を適用する時点で考えることに注意.

8/21

演習 14.3. 以下の証明図の1番下の推論規則の適用について, 正しくない理由を次の形で述べよ.

「述語論理式... に変数... が自由に出現するため」

$$\frac{[\exists y P(y)] \quad \frac{[P(z)]^1 \quad [Q(x)]}{P(z) \wedge Q(x)} \wedge I}{P(z) \wedge Q(x)} \exists E^1$$

9/21

解答: 述語論理式 $P(z) \wedge Q(x)$ に変数 z が自由出現するため.

$\exists E$ の推論では, 仮定についてだけでなく, 結論として導かれる論理式の部分についても, 変数条件があることを忘れない.

演習 14.4. $\exists y P(y) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$ の省略されている括弧を補え. また, その証明図を書け.

10/21

$$\frac{\frac{[P(x)]^1}{P(x) \vee Q(x)} \vee I \quad \frac{[\exists y P(y)]^2 \quad \frac{[P(x)]^1}{P(x) \vee Q(x)} \exists I}{\exists x (P(x) \vee Q(x))} \exists E^1}{\exists y P(y) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))} \rightarrow I^2$$

演習 14.5. 以下は同じ結論を持つ証明図だが間違っている. 間違っている理由を述べよ.

$$\frac{\frac{[\exists y P(y)]^2 \quad \frac{[P(x)]^1}{P(x) \vee Q(x)} \vee I}{\exists x (P(x) \vee Q(x))} \exists E^1}{\exists y P(y) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))} \rightarrow I^2$$

11/21

解答: $\exists E^1$ の推論で, 述語論理式 $P(x) \vee Q(x)$ に変数 x が自由に出現しているため, 変数条件が満たされていない.

その前の正しい証明図では, $\exists E^1$ の推論の適用時点ですでに $\exists I$ の適用されているため, $P(x) \vee Q(x)$ の部分が $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ となっている. この場合, $FV(\exists x (P(x) \vee Q(x))) = \emptyset$ であるから, 変数条件が満たされている.

演習 14.6. 以下の述語論理式の証明図を示せ.

- (1) $\exists y (Q \rightarrow P(y)) \rightarrow (Q \rightarrow \exists x P(x))$
- (2) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$

- (1)
$$\frac{\frac{[Q \rightarrow P(z)]^1 \quad [Q]^2}{P(z)} \rightarrow E \quad \frac{[\exists y (Q \rightarrow P(y))]^3 \quad \frac{[P(z)]}{\exists x P(x)} \exists I}{\exists x P(x)} \exists E^1}{Q \rightarrow \exists x P(x)} \rightarrow I^2 \quad \frac{\exists y (Q \rightarrow P(y)) \rightarrow (Q \rightarrow \exists x P(x))}{\exists y (Q \rightarrow P(y)) \rightarrow (Q \rightarrow \exists x P(x))} \rightarrow I^3$$
 - (2) (2箇所ある z のところは x や他の変数でも可.)
$$\frac{[P(z) \wedge Q(z)]^1}{Q(z)} \wedge E \quad \frac{[P(z) \wedge Q(z)]^1}{P(z) \vee Q(z)} \vee I \quad \frac{[\exists x (P(x) \wedge Q(x))]^2 \quad \frac{[P(z) \wedge Q(z)]^1}{P(z) \vee Q(z)} \exists I}{\exists x (P(x) \vee Q(x))} \exists E^1}{\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))} \rightarrow I^2$$
- (5箇所ある z のところは x や他の変数でも可. $\wedge E$ の結論となっている $Q(z)$ は $P(z)$ でもよい.)

13/21

目次

- 述語論理の自然演繹体系(2): $\exists$ の推論
- 述語論理の自然演繹体系: $\forall$ と $\exists$ の推論の演習
- 述語論理の自然演繹体系(3): 等号に関する推論

13/21

∀と∃の推論を使った証明図の演習

演習 14.7. 以下の述語論理式の証明図を示せ.

- (1) $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$
- (2) $\forall x (\forall y R(x, y) \rightarrow \exists y R(x, y))$
- (3) $\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$
- (4) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

14/21

自然演繹体系(3): 等号に関する推論

(15) 反射律

$$\frac{}{\forall x (x \approx x)} \text{REFL}$$

(16) 代入法則

$$\frac{s \approx t \quad [x := s](A)}{[x := t](A)} \text{SUBST}$$

ここで, s, t は任意の項を表わす.

代入法則は, $s \approx t$ が証明されているとき, 任意の述語論理式に含まれる s の部分を t に置き替えてよい, という推論になっている. 推論規則の形から, t に置き替える s の部分は1箇所でもよいし, 複数箇所でもよい.

17/21

(1)

$$\frac{\frac{[\forall x P(x)]^1}{P(z)} \forall E \quad \frac{}{\exists x P(x)} \exists I}{\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)} \rightarrow I^1$$

(z のところはどのような項を使ってもよい.)

(2)

$$\frac{\frac{\frac{[\forall y R(x, y)]^1}{R(x, z)} \forall E \quad \frac{}{\exists y R(x, y)} \exists I}{\forall y R(x, y) \rightarrow \exists y R(x, y)} \rightarrow I^1 \quad \frac{}{\forall x (\forall y R(x, y) \rightarrow \exists y R(x, y))} \forall I}{\forall x (\forall y R(x, y) \rightarrow \exists y R(x, y))} \forall I$$

(z のところはどのような項を使ってもよい.)

15/21

等号に関する推論規則を用いて証明できる述語論理式の例

対称律

$$\forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$$

推移律

$$\forall x \forall y \forall z (x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z)$$

関数記号に関する合同性 ($f \in F_n$ とする)

$$\frac{\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n \quad (x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \approx f(y_1, \dots, y_n))}{\text{合同性}}$$

述語記号に関する合同性 ($P \in \mathcal{P}_n$ とする)

$$\frac{\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n \quad (x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n \rightarrow P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n))}{\text{合同性}}$$

なお, 代入法則の代わりに, これらの推論規則全体を, 等号に関する推論規則として採用することもできる.

18/21

(3)

$$\frac{\frac{[P(x, x)]^1}{P(x, x) \rightarrow P(x, x)} \rightarrow I^1 \quad \frac{}{\exists y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))} \exists I}{\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))} \forall I$$

(4)

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))]^3}{P(z) \rightarrow Q(z)} \forall E \quad \frac{[P(z)]^1}{Q(z)} \rightarrow E}{\frac{[\exists x P(x)]^2}{\exists x Q(x)} \exists I \quad \frac{Q(z)}{\exists x Q(x)} \exists E^1}{\frac{\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)}{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)} \rightarrow I^2} \rightarrow I^3$$

(z のところは x や他の変数でも可.)

16/21

対称律

$$\frac{\frac{[\forall x (x \approx x)]^1}{z \approx z} \forall E \quad \frac{[z \approx y]^1}{y \approx z} \text{SUBST}}{\frac{y \approx z}{z \approx y \rightarrow y \approx z} \rightarrow I^1} \text{REFL}$$

$$\frac{\frac{y \approx z}{z \approx y \rightarrow y \approx z} \rightarrow I^1 \quad \frac{}{\forall y (z \approx y \rightarrow y \approx z)} \forall I}{\forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)} \forall I$$

推移律

$$\frac{\frac{[x \approx y \wedge y \approx z]^2}{x \approx y} \wedge E \quad \frac{[x \approx z]^1}{x \approx z \rightarrow x \approx z} \rightarrow I^1}{\frac{y \approx z \rightarrow x \approx z}{x \approx z} \text{SUBST}} \text{SUBST}$$

$$\frac{\frac{x \approx z}{x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z} \rightarrow I^2 \quad \frac{[x \approx y \wedge y \approx z]^2}{y \approx z} \wedge E}{\frac{y \approx z}{x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z} \rightarrow I^2} \wedge E$$

$$\frac{\frac{y \approx z}{x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z} \rightarrow I^2 \quad \frac{}{\forall z (x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z)} \forall I}{\frac{\forall y \forall z (x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z)}{\forall x \forall y \forall z (x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z)} \forall I} \forall I$$

19/21

目次

- 述語論理の自然演繹体系(2): ∃の推論
- 述語論理の自然演繹体系: ∀と∃の推論の演習
- 述語論理の自然演繹体系(3): 等号に関する推論

関数記号に関する合同性

$$\frac{\frac{[x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n]^1}{x_n \approx y_n} \wedge E \quad \frac{[x_{n-1} \approx y_{n-1}]^1}{f(x_1, \dots, x_n) \approx f(y_1, \dots, y_n)} \text{SUBST}}{\frac{f(x_1, \dots, x_n) \approx f(y_1, \dots, y_n)}{x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \approx f(y_1, \dots, y_n)} \rightarrow I^1} \text{REFL}$$

$$\frac{x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \approx f(y_1, \dots, y_n)}{\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \approx f(y_1, \dots, y_n))} \forall I$$

述語記号に関する合同性

$$\frac{\frac{[x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n]^2}{x_n \approx y_n} \wedge E \quad \frac{[x_{n-1} \approx y_{n-1}]^1}{P(y_1, \dots, y_n)} \text{SUBST}}{\frac{P(y_1, \dots, y_n)}{x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n \rightarrow P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)} \rightarrow I^1} \text{SUBST}$$

$$\frac{x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n \rightarrow P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)}{\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n \rightarrow P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n))} \forall I$$

16/21

20/21

まとめ

- 述語論理の自然演繹体系
 - $\exists$ の導入規則と除去規則
 - $\exists$ の導入規則における項の置き換え
 - $\exists$ の除去規則における変数条件
 - 等号に関する規則