

2019年度 数理論理学

講義資料(16)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

- L -構造と項の解釈
- 原子論理式の解釈
- 量化子を含まない述語論理式の解釈

L -構造

命題論理では命題変数への付値を用いて解釈を行った.
述語論理ではシグニチャの関数記号と述語記号に対応する関数と述語をもつ L -構造を用いて解釈を行う.

関数記号 $f \in F_n$ の解釈 — 集合 M 上の n 引数関数
述語記号 $P \in \mathcal{P}_n$ の解釈 — 集合 M 上の n 項関係

定義 16.1. L をシグニチャとする. L -構造 $\mathcal{M}$ とは, 空でない集合 M と, それぞれの $f \in F_n$ に対する M 上の n 引数関数 $f^{\mathcal{M}}$, それぞれの $P \in \mathcal{P}_n$ に対する M 上の n 項関係 $P^{\mathcal{M}}$ を合わせたもののことをいう. $F = \{f_1, \dots, f_m\}$, $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ のとき, $\mathcal{M}$ を $\langle M, f_1^{\mathcal{M}}, \dots, f_m^{\mathcal{M}}, P_1^{\mathcal{M}}, \dots, P_n^{\mathcal{M}} \rangle$ と記す. また, 集合 M を L -構造 $\mathcal{M}$ の台集合とよび, $|\mathcal{M}|$ と記す.

例. $L = \langle F, \mathcal{P} \rangle$, $F = \{0^0, -^1, +^2\}$, $\mathcal{P} = \{P^1, Q^2, R^3\}$ とする.

$$0^{\mathcal{M}} = 0$$

$$-^{\mathcal{M}}(x) = 2 - x$$

$$+^{\mathcal{M}}(x, y) = (x + y) \bmod 3$$

$$P^{\mathcal{M}} = \{0, 1\}$$

$$Q^{\mathcal{M}} = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$$

$$R^{\mathcal{M}} = \{\langle 0, 0, 0 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle, \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 0 \rangle\}$$

とするとき, $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, 0^{\mathcal{M}}, -^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}}, P^{\mathcal{M}}, Q^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}} \rangle$ は L -構造. また, $|\mathcal{M}| = \{0, 1, 2\}$. ($n \bmod m$ は n を m で割った余りを表わす.)

arity(P) = 1 なので, $P^{\mathcal{M}}$ は 1 項関係, つまり $P^{\mathcal{M}} \subseteq |\mathcal{M}|$.
同様に, $Q^{\mathcal{M}} \subseteq |\mathcal{M}|^2$, $R^{\mathcal{M}} \subseteq |\mathcal{M}|^3$ となることに注意.

L -構造への付値

述語論理の意味論では，項を L -構造の要素に対応させる．この対応付けのために，(命題論理のときに行ったように)まず，変数の対応づけを表わす仕組みを導入する．

定義 16.2. $\mathcal{M}$ を L -構造とする．このとき，変数集合 V から $\mathcal{M}$ の台集合 $|\mathcal{M}|$ への関数 v のことを，(L -構造 $\mathcal{M}$ への) **付値** という．

例． $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$ ，変数集合を $V = \{x_0, x_1, \dots\}$ とするとき，次のようにして定義される関数 v_0 は付値である：

$$v_0(x_i) = \begin{cases} a & (i \text{ が偶数のとき}) \\ b & (i \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

付値の変更

定義 16.3. $\mathcal{M}$ を L -構造とする． $a \in |\mathcal{M}|$, x を変数, v を $\mathcal{M}$ への付値とする． このとき, 付値 $v[a/x]$ を以下により定義する．

$$v[a/x](y) = \begin{cases} a & (x = y \text{ のとき}) \\ v(y) & (x \neq y \text{ のとき}) \end{cases}$$

つまり, $v[a/x]$ は“ x について a を対応させる”という部分の変更を v に施した付値となっている．

例. $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $V = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots\}$ とするとき, 次のようにして定義される付値 v_0 を考える

$$v_0(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} a & (i \text{ が偶数のとき}) \\ b & (i \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

このとき,

$$v_0[a/\mathbf{x}_1](\mathbf{x}_i) = \begin{cases} a & (i \text{ が偶数または } i = 1 \text{ のとき}) \\ b & (i \text{ が } 1 \text{ 以外の奇数のとき}) \end{cases}$$

$$(v_0[a/\mathbf{x}_1])[b/\mathbf{x}_2](\mathbf{x}_i) = \begin{cases} a & (i \text{ が } 2 \text{ 以外の偶数または } i = 1 \text{ のとき}) \\ b & (i \text{ が } 1 \text{ 以外の奇数または } i = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる. $(\cdots ((v_0[a_1/\mathbf{x}_1])[a_2/\mathbf{x}_2]) \cdots)[a_k/\mathbf{x}_k]$ を, 括弧を省略して, $v_0[a_1/\mathbf{x}_1][a_2/\mathbf{x}_2] \cdots [a_k/\mathbf{x}_k]$ と記す.

項の解釈

項は， L -構造の要素で解釈される．この項の解釈は，付値に依存する．

定義 16.4. t をシグニチャ L 上の項とし， v を L -構造 $\mathcal{M}$ への付値とする．このとき，付値 v に基づく項 t の解釈 $\llbracket t \rrbracket_v$ とは，以下のように定義される $|\mathcal{M}|$ の要素のことをいう．

$$\llbracket t \rrbracket_v = \begin{cases} v(t) & (t \in V \text{ のとき}) \\ f^{\mathcal{M}}(\llbracket t_1 \rrbracket_v, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v) & (t = f(t_1, \dots, t_n) \text{ のとき}) \end{cases}$$

例. $L = \langle \{0^0, -^1, +^2\}, \{\leq^2\} \rangle$ とする. このとき, L -構造 $\mathcal{M} = \langle M, 0^{\mathcal{M}}, -^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}}, \leq^{\mathcal{M}} \rangle$ を, $M = \mathbb{Z}$, $0^{\mathcal{M}} = 0$, $-^{\mathcal{M}}(x) = -x$, $+^{\mathcal{M}}(x, y) = x + y$, $\leq^{\mathcal{M}} = \{ \langle n, m \rangle \mid n \leq m \}$ により定める. また, 付値 v を

$$v(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} 3 & (i \text{ が偶数のとき}) \\ 5 & (i \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

と与える. このとき,

$$\begin{aligned} \llbracket +(+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), 0) \rrbracket_v &= +^{\mathcal{M}}(\llbracket +(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \rrbracket_v, \llbracket 0 \rrbracket_v) \\ &= +^{\mathcal{M}}(+^{\mathcal{M}}(\llbracket \mathbf{x}_1 \rrbracket_v, \llbracket \mathbf{x}_2 \rrbracket_v), 0^{\mathcal{M}}) \\ &= +^{\mathcal{M}}(+^{\mathcal{M}}(v(\mathbf{x}_1), v(\mathbf{x}_2)), 0^{\mathcal{M}}) \\ &= +^{\mathcal{M}}(+^{\mathcal{M}}(5, 3), 0^{\mathcal{M}}) \\ &= +^{\mathcal{M}}(8, 0^{\mathcal{M}}) \\ &= +^{\mathcal{M}}(8, 0) \\ &= 8 \end{aligned}$$

演習 16.5. シグニチャ $L = \langle \{0^0, -^1, +^2\}, \emptyset \rangle$ をとり,

$$0^{\mathcal{M}} = 0$$

$$-^{\mathcal{M}}(x) = 2 - x$$

$$+^{\mathcal{M}}(x, y) = (x + y) \bmod 3$$

とおいたとき, L -構造 $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, 0^{\mathcal{M}}, -^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}} \rangle$ を考える. また, 付値 v を $v(\mathbf{x}_i) = i \bmod 3$ により定める. このとき, 以下を求めよ.

(1) $\llbracket \mathbf{x}_1 \rrbracket_v$

(2) $\llbracket -\mathbf{x}_2 \rrbracket_v$

(3) $\llbracket (-\mathbf{x}_1) + (-\mathbf{x}_5) \rrbracket_v$

(解答)

(1) $\llbracket \mathbf{x}_1 \rrbracket_v = v(\mathbf{x}_1) = 1 \bmod 3 = 1.$

(2) $\llbracket -\mathbf{x}_2 \rrbracket_v = -\mathcal{M}(\llbracket \mathbf{x}_2 \rrbracket_v) = -\mathcal{M}(v(\mathbf{x}_2)) = -\mathcal{M}(2 \bmod 3) = -\mathcal{M}(2) = 0.$

(3)

$$\begin{aligned}\llbracket (-\mathbf{x}_1) + (-\mathbf{x}_5) \rrbracket_v &= +\mathcal{M}(\llbracket -\mathbf{x}_1 \rrbracket_v, \llbracket -\mathbf{x}_5 \rrbracket_v) \\ &= +\mathcal{M}(-\mathcal{M}(1 \bmod 3), -\mathcal{M}(5 \bmod 3)) \\ &= +\mathcal{M}(-\mathcal{M}(1), -\mathcal{M}(2)) \\ &= +\mathcal{M}(1, 0) \\ &= 1\end{aligned}$$

演習 16.6. シグニチャ $L = \langle \{0^0, -^1, +^2\}, \emptyset \rangle$ をとり,

$$0^{\mathcal{M}} = 0$$

$$-^{\mathcal{M}}(x) = 2 - x$$

$$+^{\mathcal{M}}(x, y) = (x + y) \bmod 3$$

とおいたとき, L -構造 $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, 0^{\mathcal{M}}, -^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}} \rangle$ を考える. このとき, 以下を求めよ.

(1) $\llbracket \mathbf{x} \rrbracket_{v[0/\mathbf{x}]}$

(2) $\llbracket -\mathbf{x} \rrbracket_{v[0/\mathbf{x}]}$

(3) $\llbracket (-\mathbf{x}) + (-\mathbf{y}) \rrbracket_{v[0/\mathbf{x}][1/\mathbf{y}]}$

演習 16.6. シグニチャ $L = \langle \{0^0, -^1, +^2\}, \emptyset \rangle$ をとり,

$$0^{\mathcal{M}} = 0$$

$$-^{\mathcal{M}}(x) = 2 - x$$

$$+^{\mathcal{M}}(x, y) = (x + y) \bmod 3$$

とおいたとき, L -構造 $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, 0^{\mathcal{M}}, -^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}} \rangle$ を考える. このとき, 以下を求めよ.

(1) $\llbracket \mathbf{x} \rrbracket_{v[0/\mathbf{x}]}$

(2) $\llbracket -\mathbf{x} \rrbracket_{v[0/\mathbf{x}]}$

(3) $\llbracket (-\mathbf{x}) + (-\mathbf{y}) \rrbracket_{v[0/\mathbf{x}][1/\mathbf{y}]}$

(解答)

(1) $\llbracket \mathbf{x} \rrbracket_{v[0/\mathbf{x}]} = 0$

(2) $\llbracket -\mathbf{x} \rrbracket_{v[0/\mathbf{x}]} = 2$

(3) $\llbracket (-\mathbf{x}) + (-\mathbf{y}) \rrbracket_{v[0/\mathbf{x}][1/\mathbf{y}]} = 0$

目次

- L -構造と項の解釈
- 原子論理式の解釈
- 量化子を含まない述語論理式の解釈

原子論理式

原子論理式の定義 (講義資料(10)) について思い出そう :

定義 16.7. [再掲] 原子論理式を以下のように定義する.

- (1) P が n 述語記号で, $t_1, \dots, t_n$ が項であるとき, $P(t_1, \dots, t_n)$ は原子論理式である (特に, $n = 0$ の場合, P と書く.)
- (2) s, t が項であるとき, $(s \doteq t)$ は原子論理式である.

特に, シグニチャを明示する場合には, シグニチャ L 上の原子論理式という言い方をすることがある.

原子論理式の解釈

原子論理式の解釈は，項の解釈を用いて定義される．

定義 16.8. A をシグニチャ L 上の原子論理式， v を L -構造 $\mathcal{M}$ への付値とする．このとき，付値 v にもとづく A の解釈 $\llbracket A \rrbracket_v$ を次のように定義する．

$$\llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v = \begin{cases} \text{T} & (\langle \llbracket t_1 \rrbracket_v, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v \rangle \in P^{\mathcal{M}} \text{ のとき}) \\ \text{F} & (\langle \llbracket t_1 \rrbracket_v, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v \rangle \notin P^{\mathcal{M}} \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\llbracket s \approx t \rrbracket_v = \begin{cases} \text{T} & (\llbracket s \rrbracket_v = \llbracket t \rrbracket_v \text{ のとき}) \\ \text{F} & (\llbracket s \rrbracket_v \neq \llbracket t \rrbracket_v \text{ のとき}) \end{cases}$$

例. $L = \langle F, \mathcal{P} \rangle$, $F = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{P^1, Q^2, R^3\}$ とする.

$$P^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$$

$$Q^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle\}$$

$$R^{\mathcal{M}} = \{\langle a, b, b \rangle, \langle b, a, b \rangle, \langle b, a, a \rangle\}$$

とするとき, L -構造 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{M} = \langle \{a, b, c\}, P^{\mathcal{M}}, Q^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}} \rangle$ とおく.

(1) $\llbracket P(x) \rrbracket_{v[a/x]} = T$. なぜなら, $\llbracket x \rrbracket_{v[a/x]} = a \in P^{\mathcal{M}}$ であるから.

(2) $\llbracket Q(x, y) \rrbracket_{v[b/x][c/y]} = T$. なぜなら, $\langle \llbracket x \rrbracket_{v[b/x][c/y]}, \llbracket y \rrbracket_{v[b/x][c/y]} \rangle = \langle b, c \rangle \in Q^{\mathcal{M}}$ であるから.

(3) $\llbracket R(x, y, z) \rrbracket_{v[a/x][b/y][a/z]} = F$. なぜなら, $\langle \llbracket x \rrbracket_{v[a/x][b/y][a/z]}, \llbracket y \rrbracket_{v[a/x][b/y][a/z]}, \llbracket z \rrbracket_{v[a/x][b/y][a/z]} \rangle = \langle a, b, a \rangle \notin R^{\mathcal{M}}$ であるから.

演習 16.9. $L = \langle F, \mathcal{P} \rangle$, $F = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{P^1, Q^2, R^3\}$ とする.

$$P^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$$

$$Q^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle\}$$

$$R^{\mathcal{M}} = \{\langle a, b, b \rangle, \langle b, a, b \rangle, \langle b, a, a \rangle\}$$

とするとき, L -構造 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{M} = \langle \{a, b, c\}, P^{\mathcal{M}}, Q^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}} \rangle$ とおく.

このとき, 以下の真理値を答えよ.

(1) $\llbracket Q(x, y) \rrbracket_{v[c/x][c/y]}$

(2) $\llbracket Q(y, x) \rrbracket_{v[b/x][c/y]}$

(3) $\llbracket R(y, x, x) \rrbracket_{v[a/x][b/y]}$

(4) $\llbracket x \approx y \rrbracket_{v[a/x][a/y]}$

(解答)

$$\begin{aligned} (1) \quad & \llbracket Q(x, y) \rrbracket_{v[c/x][c/y]} \\ & \langle \llbracket x \rrbracket_{v[c/x][c/y]}, \llbracket y \rrbracket_{v[c/x][c/y]} \rangle = \langle c, c \rangle \in Q^{\mathcal{M}} \text{より}, \\ & \llbracket Q(x, y) \rrbracket_{v[c/x][c/y]} = T. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \llbracket Q(y, x) \rrbracket_{v[b/x][c/y]} \\ & \langle \llbracket y \rrbracket_{v[b/x][c/y]}, \llbracket x \rrbracket_{v[b/x][c/y]} \rangle = \langle c, b \rangle \notin Q^{\mathcal{M}} \text{より}, \\ & \llbracket Q(y, x) \rrbracket_{v[b/x][c/y]} = F. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \llbracket R(y, x, x) \rrbracket_{v[a/x][b/y]} \\ & \langle \llbracket y \rrbracket_{v[a/x][b/y]}, \llbracket x \rrbracket_{v[a/x][b/y]}, \llbracket x \rrbracket_{v[a/x][b/y]} \rangle = \langle b, a, a \rangle \in R^{\mathcal{M}} \text{よ}, \\ & \text{り}, \quad \llbracket R(y, x, x) \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = T. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & \llbracket x \approx y \rrbracket_{v[a/x][a/y]} \\ & \llbracket x \rrbracket_{v[a/x][a/y]} = a = \llbracket y \rrbracket_{v[a/x][a/y]} \text{より}, \quad \llbracket x \approx y \rrbracket_{v[a/x][a/y]} = \\ & T. \end{aligned}$$

演習 16.10. $L = \langle F, \mathcal{P} \rangle$, $F = \{0^0, -^1, +^2\}$, $\mathcal{P} = \{P^1, Q^2, R^3\}$ とする.

$$0^{\mathcal{M}} = 0$$

$$-^{\mathcal{M}}(x) = 2 - x$$

$$+^{\mathcal{M}}(x, y) = (x + y) \bmod 3$$

$$P^{\mathcal{M}} = \{0, 1\}$$

$$Q^{\mathcal{M}} = \{\langle x, y \rangle \mid (x + y) \bmod 2 = 1\}$$

$$R^{\mathcal{M}} = \{\langle x, y, z \rangle \mid x + y + z \leq 1\}$$

とするとき, L -構造 $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, 0^{\mathcal{M}}, -^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}}, P^{\mathcal{M}}, Q^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}} \rangle$ を考える.

このとき, 以下の真理値を答えよ.

(1) $\llbracket P(x + y) \rrbracket_{v[2/x][1/y]}$

(2) $\llbracket Q(-y, -x) \rrbracket_{v[0/x][1/y]}$

(3) $\llbracket R(0, -x, x + x) \rrbracket_{v[2/x]}$

(解答)

$$\begin{aligned} (1) \quad & \llbracket P(x + y) \rrbracket_{v[2/x][1/y]} \\ & \llbracket x + y \rrbracket_{v[2/x][1/y]} = 0 \in P^{\mathcal{M}} \text{ より,} \\ & \llbracket P(x + y) \rrbracket_{v[2/x][1/y]} = T. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \llbracket Q(-y, -x) \rrbracket_{v[0/x][1/y]} \\ & \langle \llbracket -y \rrbracket_{v[0/x][1/y]}, \llbracket -x \rrbracket_{v[0/x][1/y]} \rangle = \langle 1, 2 \rangle. \text{ ここで, } (1 + \\ & 2) \bmod 2 = 1 \text{ であるから, } \langle 1, 2 \rangle \in Q^{\mathcal{M}}. \text{ よって,} \\ & \llbracket Q(-y, -x) \rrbracket_{v[0/x][1/y]} = T. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \llbracket R(0, -x, x + x) \rrbracket_{v[2/x]} \\ & \langle \llbracket 0 \rrbracket_{v[2/x]}, \llbracket -x \rrbracket_{v[2/x]}, \llbracket x + x \rrbracket_{v[2/x]} \rangle = \langle 0, 0, 1 \rangle. \text{ ここで, } (0 + \\ & 0 + 1) \leq 1 \text{ であるから, } \langle 0, 0, 1 \rangle \in R^{\mathcal{M}}. \text{ よって, } \llbracket R(0, -x, x + \\ & x) \rrbracket_{v[2/x]} = T. \end{aligned}$$

演習 16.11. シグニチャを $L = \langle \{f^1\}, \{P^2\} \rangle$ とする.

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{M}}(x) &= x + 1 \\ P^{\mathcal{M}} &= \{ \langle x, y \rangle \mid y = 2x \} \end{aligned}$$

とおき, L -構造 $\mathcal{M}$ を, $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, f^{\mathcal{M}}, P^{\mathcal{M}} \rangle$ と定める. ($\mathbb{N}$ は自然数全体の集合.)

- (1) $\llbracket P(x, y) \rrbracket_v = T$ となる付値 v を 1 つ与えよ.
- (2) $\llbracket P(x, f(x)) \rrbracket_v = T$ となる付値 v はあるか?

(解答)

(1)

$$\begin{aligned}\llbracket P(\mathbf{x}, y) \rrbracket_v = T &\Leftrightarrow \langle \llbracket \mathbf{x} \rrbracket_v, \llbracket y \rrbracket_v \rangle \in P^{\mathcal{M}} \\ &\Leftrightarrow \langle v(\mathbf{x}), v(y) \rangle \in P^{\mathcal{M}} \\ &\Leftrightarrow v(y) = 2v(\mathbf{x})\end{aligned}$$

であるから, $v(\mathbf{x}) = 1$, $v(y) = 2$ となる付値 v をとればよい.

(2)

$$\begin{aligned}\llbracket P(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \rrbracket_v = T &\Leftrightarrow \langle \llbracket \mathbf{x} \rrbracket_v, \llbracket f(\mathbf{x}) \rrbracket_v \rangle \in P^{\mathcal{M}} \\ &\Leftrightarrow \langle v(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}) + 1 \rangle \in P^{\mathcal{M}} \\ &\Leftrightarrow v(\mathbf{x}) + 1 = 2v(\mathbf{x})\end{aligned}$$

であるから, $v(\mathbf{x}) = 1$ となる付値 v をとれば, $\llbracket P(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \rrbracket_v = T$ となる. よって, 答えは **Yes**.

演習 16.12. シグニチャを $L = \langle \emptyset, \{P^2\} \rangle$ とするとき, L -構造 $\mathcal{M}_i = \langle |\mathcal{M}_i|, P^{\mathcal{M}_i} \rangle$ ($1 \leq i \leq 5$) を以下のように定める.

$$\mathcal{M}_1 = \langle \{0, 1, 2\}, \{ \langle x, y \rangle \mid x < y \} \rangle$$

$$\mathcal{M}_2 = \langle \{0, 1, 2\}, \{ \langle x, y \rangle \mid x \leq y \} \rangle$$

$$\mathcal{M}_3 = \langle \{0, 1, 2\}, \{ \langle x, y \rangle \mid x + y = 2 \} \rangle$$

$$\mathcal{M}_4 = \langle \{0, 1, 2\}, \{ \langle x, y \rangle \mid x + y \neq 0 \} \rangle$$

$$\mathcal{M}_5 = \langle \{0, 1, 2\}, \{ \langle x, y \rangle \mid x \neq y \} \rangle$$

このとき,

(1) $\llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[0/x][1/y]} = T$ となる $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_5$ を全て挙げよ.

(2) $\llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[1/x][1/y]} = T$ となる $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_5$ を全て挙げよ.

演習 16.12. シグニチャを $L = \langle \emptyset, \{P^2\} \rangle$ とするとき, L -構造 $\mathcal{M}_i = \langle |\mathcal{M}_i|, P^{\mathcal{M}_i} \rangle$ ($1 \leq i \leq 5$) を以下のように定める.

$$\mathcal{M}_1 = \langle \{0, 1, 2\}, \{ \langle x, y \rangle \mid x < y \} \rangle$$

$$\mathcal{M}_2 = \langle \{0, 1, 2\}, \{ \langle x, y \rangle \mid x \leq y \} \rangle$$

$$\mathcal{M}_3 = \langle \{0, 1, 2\}, \{ \langle x, y \rangle \mid x + y = 2 \} \rangle$$

$$\mathcal{M}_4 = \langle \{0, 1, 2\}, \{ \langle x, y \rangle \mid x + y \neq 0 \} \rangle$$

$$\mathcal{M}_5 = \langle \{0, 1, 2\}, \{ \langle x, y \rangle \mid x \neq y \} \rangle$$

このとき,

(1) $\llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[0/x][1/y]} = T$ となる $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_5$ を全て挙げよ.

(2) $\llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[1/x][1/y]} = T$ となる $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_5$ を全て挙げよ.

(解答)

(1) $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_4, \mathcal{M}_5$

(2) $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4$

目次

- L -構造と項の解釈
- 原子論理式の解釈
- 量化子を含まない述語論理式の解釈

原子論理式の命題結合子による結合

付値によって，原子論理式の真理値が定まった．これは，命題論理のときに，付値によって命題変数の真理値が定まったのと同じ．従って，命題論理のときに同様に，自然に原子論理式を命題結合子で繋げることができる．

命題論理

$\llbracket P \rrbracket_v = T$ かつ $\llbracket Q \rrbracket_v = T$ のとき， $\llbracket P \wedge Q \rrbracket_v = T$.

述語論理

$\llbracket P(x, y) \rrbracket_v = T$ かつ $\llbracket Q(z) \rrbracket_v = T$ のとき，
 $\llbracket P(x, y) \wedge Q(z) \rrbracket_v = T$

原子論理式を命題結合子で繋げた式を **量化子** を含まない **述語論理式** とよぶ (厳密な定義は次ページ).

量化子を含まない述語論理式

原子論理式を命題結合子による結合した論理式を，量化子を含まない述語論理式とよぶ．

定義 16.13. 量化子を含まない述語論理式は以下のように帰納的に定義される．

- (1) 原子論理式は量化子を含まない述語論理式である．
- (2) $\perp$ および $\top$ は量化子を含まない述語論理式である．
- (3) A が量化子を含まない述語論理式であるとき， $(\neg A)$ は量化子を含まない述語論理式である．
- (4) A と B がともに量化子を含まない述語論理式であるとき， $(A \wedge B)$ ， $(A \vee B)$ ， $(A \rightarrow B)$ は，ともに量化子を含まない述語論理式である．

命題論理式のと看と同様に，括弧を省略する．

定義 16.14. A をシグニチャ L 上の量化子を含まない述語論理式, v を L -構造 $\mathcal{M}$ への付値とする. このとき, **付値 v にもとづく A の解釈 $\llbracket A \rrbracket_v$** を次のように定義する.

$$\begin{aligned}
 \llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v &= \begin{cases} \text{T} & (\langle \llbracket t_1 \rrbracket_v, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v \rangle \in P^{\mathcal{M}} \text{ のとき}) \\ \text{F} & (\langle \llbracket t_1 \rrbracket_v, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v \rangle \notin P^{\mathcal{M}} \text{ のとき}) \end{cases} \\
 \llbracket s \approx t \rrbracket_v &= \begin{cases} \text{T} & (\llbracket s \rrbracket_v = \llbracket t \rrbracket_v \text{ のとき}) \\ \text{F} & (\llbracket s \rrbracket_v \neq \llbracket t \rrbracket_v \text{ のとき}) \end{cases} \\
 \llbracket \perp \rrbracket_v &= \text{F} \\
 \llbracket \top \rrbracket_v &= \text{T} \\
 \llbracket \neg B \rrbracket_v &= \begin{cases} \text{T} & (\llbracket B \rrbracket_v = \text{F} \text{ のとき}) \\ \text{F} & (\llbracket B \rrbracket_v = \text{T} \text{ のとき}) \end{cases} \\
 \llbracket B \wedge C \rrbracket_v &= \begin{cases} \text{T} & (\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{T} \text{ のとき}) \\ \text{F} & (\text{それ以外}) \end{cases} \\
 \llbracket B \vee C \rrbracket_v &= \begin{cases} \text{F} & (\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{F} \text{ のとき}) \\ \text{T} & (\text{それ以外}) \end{cases} \\
 \llbracket B \rightarrow C \rrbracket_v &= \begin{cases} \text{F} & (\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}, \llbracket C \rrbracket_v = \text{F} \text{ のとき}) \\ \text{T} & (\text{それ以外}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

例 16.15. シグニチャを $L = \langle \{\}, \{P^1, Q^1\} \rangle$ とする.

$$P^{\mathcal{M}} = \{x \mid x \text{ は偶数} \}$$

$$Q^{\mathcal{M}} = \{x \mid x \text{ は3の倍数} \}$$

とおき, L -構造 $\mathcal{M}$ を, $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{M}}, Q^{\mathcal{M}} \rangle$ と定める. ($\mathbb{N}$ は自然数全体の集合.)

(1) $\llbracket \neg P(x) \rrbracket_{v[2/x]} = \text{not}(\llbracket P(x) \rrbracket_{v[2/x]}) = \text{not}(T) = F$

(2) $\llbracket P(x) \wedge Q(x) \rrbracket_{v[6/x]} = \text{and}(T, T) = T$

(3) $\llbracket \neg P(x) \rightarrow Q(x) \rrbracket_{v[1/x]} = \text{imp}(\text{not}(F), F) = F$

(4) $\llbracket P(x) \vee \neg Q(y) \rightarrow Q(x) \rrbracket_{v[1/x][5/y]} = F$

演習 16.16. シグニチャを $L = \langle \{f^1\}, \{P^2\} \rangle$ とする.

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{M}}(x) &= x + 1 \\ P^{\mathcal{M}} &= \{ \langle x, y \rangle \mid y = 2x \} \end{aligned}$$

とおき, L -構造 $\mathcal{M}$ を, $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, f^{\mathcal{M}}, P^{\mathcal{M}} \rangle$ と定める. ($\mathbb{N}$ は自然数全体の集合.)

このとき, 以下の値を求めよ.

- (1) $\llbracket \neg P(x, f(y)) \rrbracket_{v[2/x][3/y]}$
- (2) $\llbracket P(x, y) \rightarrow P(y, x) \rrbracket_{v[1/x][2/y]}$

(解答)

$$(1) \llbracket x \rrbracket_{v[2/x][3/y]} = 2, \llbracket f(y) \rrbracket_{v[2/x][3/y]} = 4.$$

よって, $\langle 2, 4 \rangle \in P^{\mathcal{M}}$ より, $\llbracket P(x, f(y)) \rrbracket_{v[2/x][3/y]} = T.$

よって, 解釈の定義より, $\llbracket \neg P(x, f(y)) \rrbracket_{v[2/x][3/y]} = F.$

$$(2) \llbracket x \rrbracket_{v[1/x][2/y]} = 1, \llbracket y \rrbracket_{v[1/x][2/y]} = 2.$$

よって, $\langle 1, 2 \rangle \in P^{\mathcal{M}}, \langle 2, 1 \rangle \notin P^{\mathcal{M}}$ より,

$$\llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[2/x][3/y]} = T, \llbracket P(y, x) \rrbracket_{v[2/x][3/y]} = F.$$

よって, 解釈の定義より, $\llbracket P(x, y) \rightarrow P(y, x) \rrbracket_{v[2/x][3/y]} = F.$

まとめ

- L -構造 (L はシグニチャ), 付値
- 項の解釈, 付値の変更
- 原子論理式の解釈
- 量化子を含まない述語論理式の解釈