# 2019年度 数理論理学

# 講義資料(17)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

## 目次



## 半順序集合(復習)

ここでは，意味論の演習の題材として用いる半順序集合について復習し，半順序集合を表わすハッセの図式について説明する．

**定義 17.1.** 集合 $A$ 上の2項関係 $R$ が次の性質を満たすとき，$R$を集合 $A$ 上の半順序とよぶ.

**(1)** 任意の$a \in A$について，$aRa$,
**(2)** 任意の$a, b, c \in A$について，$aRb$かつ$bRc$ならば$aRc$,
**(3)** 任意の$a, b \in A$について，$aRb$かつ$bRa$ならば，$a = b$.

**(1), (2), (3)** をそれぞれ反射律，推移律，反対称律とよんだ．以下では，半順序を表わすのに記号$\leq$を用いる．

半順序 $R$をもつ集合 $A$のことを半順序集合とよぶ.



**例1.** 自然数の大小関係$\leq$は，自然数全体の集合$\mathbb{N}$上の半順序.

**例2.** 自然数の大小関係$\leqslant$を$n \leqslant m \overset{\text{def}}{\iff}$ “$m$は$n$で割り切れる” と定義すると，$\leqslant$は$\mathbb{N}$上の半順序.

**例3.** 集合の部分集合関係$\subseteq$は，自然数の冪集合$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{U \mid U \subseteq \mathbb{N}\}$上の半順序.

例1の半順序は，どの要素同士も大小関係がある(較べられる)という性質をもつ．このような半順序は，全順序とよばれる.

例2の半順序については，例えば$3 \leqslant 5$も$5 \leqslant 3$も成立しないので，較べられない要素も存在する．よって，例2の半順序は，全順序でない．例3も同様に全順序でない.



**演習 17.2.** $M = \{a, b, c\}$とする．以下の$\leq$のうち，$M$上の半順序となっているものはどれか．すべて挙げよ.

**(1)** $\leq = \{\langle a, a\rangle\}$
**(2)** $\leq = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$
**(3)** $\leq = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$
**(4)** $\leq = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$
**(5)** $\leq = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$
**(6)** $\leq = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\}$



**演習 17.2.** $M = \{a, b, c\}$とする．以下の$\leq$のうち，$M$上の半順序となっているものはどれか．すべて挙げよ.

**(1)** $\leq = \{\langle a, a\rangle\}$
**(2)** $\leq = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$
**(3)** $\leq = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$
**(4)** $\leq = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$
**(5)** $\leq = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$
**(6)** $\leq = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\}$

**(1)**: 反射律が成立していないので半順序でない.
**(3)**: 反対称律が成立していないので半順序でない.
**(4)**: 推移律が成立していないので半順序でない.
**(2),(5),(6)** は半順序.



## 半順序$\leq$と関係$<$

半順序$\leq$を用いて関係$\geq, <, >$を定義する：

$$x \geq y \overset{\text{def}}{\iff} y \leq x$$
$$x < y \overset{\text{def}}{\iff} x \leq y \land x \neq y$$
$$x > y \overset{\text{def}}{\iff} y \leq x \land x \neq y$$

このとき，関係$<$は非反射的かつ推移的な関係であり，

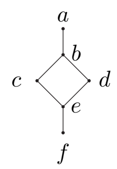
$$x \leq y \iff x < y \lor x = y$$
$$x \geq y \iff y > x \lor x = y$$
$$x > y \iff y < x$$

が成立．つまり，$<$が決まれば，$\leq, \geq, >$も決まる．(このため，$<$を基本にとって$<$を半順序とよぶ場合もある．)



## ハッセの図式(ハッセ図)

以下の約束に従って，半順序集合を図で表わす: 要素は頂点で表わす．頂点$x$と頂点$y$が線で繋がっているのは，$x < y$または$x > y$であることを表わし，その大小は位置の上下で表わす(下にあるのが小さい方).



**(1)** この半順序集合の台集合は $\{a, b, c, d, e, f\}$.

**(2)** $a$は1番大きい要素．つまり，任意の$x$について，$x \leq a$)が成立する．

**(3)** 要素$c, d$については，$c \leq d$も$d \leq c$も成立しない．(半順序関係では，大小関係はつかなくても良い．)

**(4)** $x \in \{a, b\}$について$c < x$が成立する．

**(5)** $x \in \{a, b, c, d\}$について$e < x$が成立する．

$\leq$が全順序であることは，ハッセ図が縦1列となっていることと等しい．



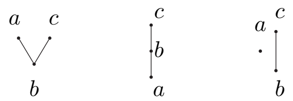
**例 17.3.** $M = \{a, b, c\}$とする．以下の場合のそれぞれについて，半順序集合$\mathcal{M}$を表すハッセ図はどのようになるか考えよ．

**(1)** $< = \{\langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\}$のとき．
**(2)** $< = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$のとき．
**(3)** $< = \{\langle b, c\rangle\}$のとき．



**例 17.3.** $M = \{a, b, c\}$とする．以下の場合のそれぞれについて，半順序集合$\mathcal{M}$を表すハッセ図はどのようになるか考えよ．

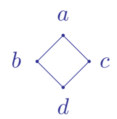
**(1)** $< = \{\langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\}$のとき．
**(2)** $< = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$のとき．
**(3)** $< = \{\langle b, c\rangle\}$のとき．




**(1)** **(2)** **(3)**



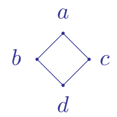
**例 17.4.** $L = \langle \emptyset, \{\leq^2, <^2, \geq^2, >^2\}\rangle$をシグニチャ，$L$-構造$\mathcal{M} = \langle M, \leq^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}, \geq^{\mathcal{M}}, >^{\mathcal{M}}\rangle$を以下のハッセ図で表わされる半順序集合とする．




とする．このとき，$\leq^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}, \geq^{\mathcal{M}}, >^{\mathcal{M}}$ がどのようになるか考えよ．



**例 17.4.** $L = \langle \emptyset, \{\leq^2, <^2, \geq^2, >^2\}\rangle$をシグニチャ，$L$-構造$\mathcal{M} = \langle M, \leq^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}, \geq^{\mathcal{M}}, >^{\mathcal{M}}\rangle$を以下のハッセ図で表わされる半順序集合とする．




とする．このとき，$\leq^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}, \geq^{\mathcal{M}}, >^{\mathcal{M}}$ がどのようになるか考えよ．

$$
\begin{array}{lcl}
\leq^{\mathcal{M}} & = & \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, a\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, b\rangle, \langle d, c\rangle \\
<^{\mathcal{M}} & = & \{\langle b, a\rangle, \langle c, a\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, b\rangle, \langle d, c\rangle\} \\
\geq^{\mathcal{M}} & = & \{\ \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, d \\
>^{\mathcal{M}} & = & \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, d\rangle\}
\end{array}
$$



## 目次





## 付値のもとでの述語論理式の解釈

付値のもとでの述語論理式の解釈について説明する．

**定義 17.5.** $A$をシグニチャ$L$上の述語論理式，$v$を$L$-構造$\mathcal{M}$への付値とする．このとき，付値$v$にもとづく$A$の解釈$[\![A]\!]_v$を次のように定義する．

$$
\begin{array}{lcl}
[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]_v & = & \begin{cases} \mathrm{T} \ (\langle [\![t_1]\!]_v, \ldots, [\![t_n]\!]_v\rangle \in P^{\mathcal{M}} \text{のとき}) \\ \mathrm{F} \ (\langle [\![t_1]\!]_v, \ldots, [\![t_n]\!]_v\rangle \notin P^{\mathcal{M}} \text{のとき}) \end{cases} \\
[\![s \approx t]\!]_v & = & \begin{cases} \mathrm{T} \ ([\![s]\!]_v = [\![t]\!]_v \text{のとき}) \\ \mathrm{F} \ ([\![s]\!]_v \neq [\![t]\!]_v \text{のとき}) \end{cases} \\
[\![\bot]\!]_v & = & \mathrm{F} \\
[\![\top]\!]_v & = & \mathrm{T} \\
[\![\neg B]\!]_v & = & \begin{cases} \mathrm{T} & ([\![B]\!]_v = \mathrm{F} \text{のとき}) \\ \mathrm{F} & ([\![B]\!]_v = \mathrm{T} \text{のとき}) \end{cases}
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{lcl}
[\![B \wedge C]\!]_v & = & \begin{cases} \mathrm{T} & ([\![B]\!]_v = [\![C]\!]_v = \mathrm{T} \text{のとき}) \\ \mathrm{F} & (\text{それ以外}) \end{cases} \\
[\![B \vee C]\!]_v & = & \begin{cases} \mathrm{F} & ([\![B]\!]_v = [\![C]\!]_v = \mathrm{F} \text{のとき}) \\ \mathrm{T} & (\text{それ以外}) \end{cases} \\
[\![B \to C]\!]_v & = & \begin{cases} \mathrm{F} & ([\![B]\!]_v = \mathrm{T}，[\![C]\!]_v = \mathrm{F} \text{のとき}) \\ \mathrm{T} & (\text{それ以外}) \end{cases} \\
[\![\forall x\, B]\!]_v & = & \begin{cases} \mathrm{T} & (\text{任意の} a \in |\mathcal{M}| \text{について，} \\ & \quad [\![B]\!]_{v[a/x]} = \mathrm{T} \text{のとき}) \\ \mathrm{F} & (\text{それ以外}) \end{cases} \\
[\![\exists x\, B]\!]_v & = & \begin{cases} \mathrm{T} & (\text{ある} a \in |\mathcal{M}| \text{が存在して，} \\ & \quad [\![B]\!]_{v[a/x]} = \mathrm{T} \text{のとき}) \\ \mathrm{F} & (\text{それ以外}) \end{cases}
\end{array}
$$

## 全称と 存在の解釈の直観的な意味

(復習) 付値は，変数を ($L$-構造の)どの要素に対応させるか，を表わす．$v[a/x]$ は $x$ を $a$ に対応させるように $v$ を更新した付値．

$[\![\forall xA]\!]_v = \mathrm{T} \Leftrightarrow$ 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について，$[\![A]\!]_{v[a/x]} = \mathrm{T}$

$\forall xA$(の解釈)が真 $\Leftrightarrow$ $x$ を ($L$-構造の)どの要素にとっても，$A$(の解釈)が真.

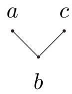
$[\![\exists xA]\!]_v = \mathrm{T} \Leftrightarrow$ ある $a \in |\mathcal{M}|$ が存在して，$[\![A]\!]_{v[a/x]} = \mathrm{T}$

$\exists xA$(の解釈)が真 $\Leftrightarrow$ $x$ を ($L$-構造の)どれかの要素にとると，$A$(の解釈)が真.



## 解釈の計算

例．$L = \langle \emptyset, \{\le^2, <^2, \ge^2, >^2\}\rangle$ をシグニチャ，$L$-構造 $\mathcal{M} = \langle M, \le^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}, \ge^{\mathcal{M}}, >^{\mathcal{M}}\rangle$ を以下のハッセ図で表わされる半順序集合，$v$ を任意の付値とするとき，$[\![\exists \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_v$ を計算する．




$M = \{a, b, c\}$ であるから，$[\![\exists \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_v$ の値は，もし，

$[\![\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[a/\mathrm{x}]}$, $[\![\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[b/\mathrm{x}]}$, $[\![\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[c/\mathrm{x}]}$,

のいずれかが真になれば真，これらが3つとも偽ならば偽，となる．これらの3つの値について，次に調べる．



**(1)** $[\![\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[a/\mathrm{x}]}$
定義より，この値は，

$$[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[a/\mathrm{x}][a/\mathrm{y}]},\ [\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[a/\mathrm{x}][b/\mathrm{y}]},\ [\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[a/\mathrm{x}][c/\mathrm{y}]},$$

の値が全て真となるとき真，そうでないときは偽となる．

- **(1-a)** $\langle a, a\rangle \in \le^{\mathcal{M}}$ より，$[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[a/\mathrm{x}][a/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$.
- **(1-b)** $\langle a, b\rangle \notin \le^{\mathcal{M}}$ より，$[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[a/\mathrm{x}][b/\mathrm{y}]} = \mathrm{F}$.
- **(1-c)** $\langle a, c\rangle \notin \le^{\mathcal{M}}$ より，$[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[a/\mathrm{x}][c/\mathrm{y}]} = \mathrm{F}$.

以上より，$[\![\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[a/\mathrm{x}]} = \mathrm{F}$.



**(2)** $[\![\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[b/\mathrm{x}]}$
定義より，この値は，

$$[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[b/\mathrm{x}][a/\mathrm{y}]},\ [\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[b/\mathrm{x}][b/\mathrm{y}]},\ [\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[b/\mathrm{x}][c/\mathrm{y}]},$$

の値が全て真となるとき真，そうでないときは偽となる．

- **(2-a)** $\langle b, a\rangle \in \le^{\mathcal{M}}$ より，$[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[b/\mathrm{x}][a/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$.
- **(2-b)** $\langle b, b\rangle \in \le^{\mathcal{M}}$ より，$[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[b/\mathrm{x}][b/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$.
- **(2-c)** $\langle b, c\rangle \in \le^{\mathcal{M}}$ より，$[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[b/\mathrm{x}][c/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$.

以上より，$[\![\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[b/\mathrm{x}]} = \mathrm{T}$.



**(3)** $[\![\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[c/\mathrm{x}]}$
定義より，この値は，

$$[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[c/\mathrm{x}][a/\mathrm{y}]},\ [\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[c/\mathrm{x}][b/\mathrm{y}]},\ [\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[c/\mathrm{x}][c/\mathrm{y}]},$$

の値が全て真となるとき真，そうでないときは偽となる．

- **(3-a)** $\langle c, a\rangle \notin \le^{\mathcal{M}}$ より，$[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[c/\mathrm{x}][a/\mathrm{y}]} = \mathrm{F}$.
- **(3-b)** $\langle c, b\rangle \notin \le^{\mathcal{M}}$ より，$[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[c/\mathrm{x}][b/\mathrm{y}]} = \mathrm{F}$.
- **(3-c)** $\langle c, c\rangle \in \le^{\mathcal{M}}$ より，$[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[c/\mathrm{x}][c/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$.

以上より，$[\![\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[c/\mathrm{x}]} = \mathrm{F}$.

**(1),(2),(3)** より，$[\![\exists \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_v = \mathrm{T}$. (例終わり)



前例の計算を，もう少しわかりやすく表で書いてみる．

| $[\![\exists \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_v$ | $m$ | $[\![\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[m/\mathrm{x}]}$ | $n$ | $[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[m/\mathrm{x}][n/\mathrm{y}]}$ |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | | $a$ | T |
| | | | $b$ | F |
| | | F | $c$ | F |
| | $b$ | | $a$ | T |
| | | | $b$ | T |
| | | T | $c$ | T |
| | $c$ | | $a$ | F |
| | | | $b$ | F |
| T | | F | $c$ | T |



点線の縦線では，右側の真理値のどれかが真なら，左側の真理値が真となる．

二重線の縦線では，右側の真理値のすべてが真なら，左側の真理値が真となる．

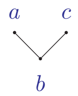
| $[\![\exists \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_v$ | $m$ | $[\![\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[m/\mathrm{x}]}$ | $n$ | $[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[m/\mathrm{x}][n/\mathrm{y}]}$ |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | | $a$ | T |
| | | | $b$ | F |
| | | F | $c$ | F |
| | $b$ | | $a$ | T |
| | | | $b$ | T |
| | | T | $c$ | T |
| | $c$ | | $a$ | F |
| | | | $b$ | F |
| T | | F | $c$ | T |



また，実際には，全ての計算をする必要はない．今の例では，**(1-a),(1-b)** を計算した段階で，**(1)** の解釈が F と定まるので **(1-c)** の計算は必要ない．また，**(2)** を計算した段階で，全体の述語論理式の解釈が定まるので **(3)** の計算は必要ない．

| $[\![\exists \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_v$ | $m$ | $[\![\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[m/\mathrm{x}]}$ | $n$ | $[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[m/\mathrm{x}][n/\mathrm{y}]}$ |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | | $a$ | T |
| | | F | $b$ | F |
| | | | $c$ | – |
| | $b$ | | $a$ | T |
| | | | $b$ | T |
| T | | T | $c$ | T |
| | $c$ | | $a$ | |
| | | | $b$ | |
| | | – | $c$ | |

**演習 17.6.** 以下のハッセ図で与えられる半順序集合 $\mathcal{M}$ を考える．




このとき，$[\![\exists y\, \forall x\, (x \leq y)]\!]_v$ の真理値を以下の表を埋めることで計算してみよ．

| $[\![\exists y\, \forall x\, (x \leq y)]\!]_v$ | $m$ | $[\![\forall x\, (x \leq y)]\!]_{v[m/y]}$ | $n$ | $[\![x \leq y]\!]_{v[m/y][n/x]}$ |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | | $a$ | |
| | | | $b$ | |
| | | | $c$ | |
| | $b$ | | $a$ | |
| | | | $b$ | |
| | | | $c$ | |
| | $c$ | | $a$ | |
| | | | $b$ | |
| | | | $c$ | |



(解答)

| $[\![\exists y\, \forall x\, (x \leq y)]\!]_v$ | $m$ | $[\![\forall x\, (x \leq y)]\!]_{v[m/y]}$ | $n$ | $[\![x \leq y]\!]_{v[m/y][n/x]}$ |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | | $a$ | T |
| | | | $b$ | T |
| | | F | $c$ | F |
| | $b$ | | $a$ | F |
| | | | $b$ | − |
| | | F | $c$ | − |
| | $c$ | | $a$ | F |
| | | | $b$ | − |
| F | | F | $c$ | − |



正確な記述ではなくなるが，付値を省略して前ページの表を以下のように書くともう少し簡単．

| $[\![\exists y\, \forall x\, (x \leq y)]\!]$ | y | $[\![\forall x\, (x \leq y)]\!]$ | x | $[\![x \leq y]\!]$ |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | | $a$ | T |
| | | | $b$ | T |
| | | F | $c$ | F |
| | $b$ | | $a$ | F |
| | | | $b$ | − |
| | | F | $c$ | − |
| | $c$ | | $a$ | F |
| | | | $b$ | − |
| F | | F | $c$ | − |



**演習 17.7.** 演習**17.6**と同じく，半順序集合による $L$-構造を考える．このとき，$[\![\exists x\, \forall y\, (x \leq y \vee y \leq x \to x \approx y)]\!]_v$ の真理値を以下の表を埋めることで計算してみよ．

$$\exists x\, \forall y\, \underbrace{(\underbrace{x \leq y}_{P} \vee \underbrace{y \leq x}_{Q} \to \underbrace{x \approx y}_{R})}_{A}$$

| $[\![\exists x\, \forall y A]\!]$ | x | $[\![\forall y A]\!]$ | y | $[\![A]\!]$ $[\![P \vee Q \to R]\!]$ | $[\![P \vee Q]\!]$ | $[\![P]\!]$ $[\![x \leq y]\!]$ | $[\![Q]\!]$ $[\![y \leq x]\!]$ | $[\![R]\!]$ $[\![x \approx y]\!]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | | $a$ | | | | | |
| | | | $b$ | | | | | |
| | | | $c$ | | | | | |
| | $b$ | | $a$ | | | | | |
| | | | $b$ | | | | | |
| | | | $c$ | | | | | |
| | $c$ | | $a$ | | | | | |
| | | | $b$ | | | | | |
| | | | $c$ | | | | | |



(解答)

$$\exists x\, \forall y\, \underbrace{(\underbrace{x \leq y}_{P} \vee \underbrace{y \leq x}_{Q} \to \underbrace{x \approx y}_{R})}_{A}$$

| $[\![\exists x\, \forall y A]\!]$ | x | $[\![\forall y A]\!]$ | y | $[\![A]\!]$ $[\![P \vee Q \to R]\!]$ | $[\![P \vee Q]\!]$ | $[\![P]\!]$ $[\![x \leq y]\!]$ | $[\![Q]\!]$ $[\![y \leq x]\!]$ | $[\![R]\!]$ $[\![x \approx y]\!]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | | $a$ | T | T | T | T | T |
| | | | $b$ | F | T | F | T | F |
| | | F | $c$ | T | F | F | F | F |
| | $b$ | | $a$ | F | T | T | F | F |
| | | | $b$ | T | T | T | T | T |
| | | F | $c$ | F | T | T | F | F |
| | $c$ | | $a$ | T | F | F | F | F |
| | | | $b$ | F | T | F | T | F |
| F | | F | $c$ | T | T | T | T | T |

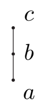
よって，$[\![\exists x\, \forall y\, (x \leq y \vee y \leq x \to x \approx y)]\!]_v = \mathrm{F}$.



**演習 17.8.** 下のハッセ図で与えられる半順序集合による $L$-構造を考える．このとき，以下の真理値を計算せよ．

**(1)** $[\![\forall x\, \forall y\, (x \leq y \vee y < x)]\!]_v$

**(2)** $[\![\forall x\, (\exists y\, (x < y) \vee \exists y\, (y < x))]\!]_v$






(解答)

**(1)** $\forall x\, \forall y\, (\underbrace{x \leq y}_{P} \vee \underbrace{y < x}_{Q})$

| $[\![\forall x\, \forall y\, (P \vee Q)]\!]$ | x | $[\![\forall y\, (P \vee Q)]\!]$ | y | $[\![P \vee Q]\!]$ | $[\![P]\!]$ $[\![x \leq y]\!]$ | $[\![Q]\!]$ $[\![y < x]\!]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | | $a$ | T | T | F |
| | | | $b$ | T | T | F |
| | | T | $c$ | T | T | F |
| | $b$ | | $a$ | T | F | T |
| | | | $b$ | T | T | F |
| | | T | $c$ | T | T | F |
| | $c$ | | $a$ | T | F | T |
| | | | $b$ | T | F | T |
| T | | T | $c$ | T | T | F |

よって，$[\![\forall x\, \forall y\, (x \leq y \vee y < x)]\!]_v = \mathrm{T}$.



(解答)

**(2)** $\forall x\, \underbrace{(\underbrace{\exists y\, \underbrace{(x < y)}_{P}}_{B} \vee \underbrace{\exists y\, (\underbrace{y < x}_{Q})}_{C})}_{A}$

| $[\![\forall x\, A]\!]$ | x | $[\![A]\!]$ $[\![B \vee C]\!]$ | $[\![B]\!]$ $[\![\exists y\, P]\!]$ | y | $[\![P]\!]$ $[\![x < y]\!]$ | $[\![C]\!]$ $[\![\exists y\, Q]\!]$ | y | $[\![Q]\!]$ $[\![y < x]\!]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | | | $a$ | F | | $a$ | F |
| | | | | $b$ | T | | $b$ | F |
| | | T | T | $c$ | T | F | $c$ | F |
| | $b$ | | | $a$ | F | | $a$ | T |
| | | | | $b$ | F | | $b$ | F |
| | | T | T | $c$ | T | T | $c$ | F |
| | $c$ | | | $a$ | F | | $a$ | T |
| | | | | $b$ | F | | $b$ | T |
| T | | T | F | $c$ | F | T | $c$ | F |

よって，$[\![\forall x\, (\exists y\, (x < y) \vee \exists y\, (y < x))]\!]_v = \mathrm{T}$.

## 目次

- 半順序集合とハッセの図式
- 述語論理式の解釈(1)
- 述語論理式の解釈(2)



## 述語論理式の解釈を求める：計算表を離れて

前節では，表を使って述語論理式の解釈の計算を行った．

しかし，このような計算表を書けるのは，$L$-構造の台集合が有限集合の場合だけ．

一方，$L$-構造の台集合は無限集合でもよい．(例えば，台集合として，自然数集合や整数集合などを用いてもよい．)

ここでは，有限半順序集合以外のさまざまな$L$-構造を用いて，述語論理式の解釈について演習する．



## 全称・存在の解釈を求めるには(基本戦略)

$[\![\forall x A]\!]_v = \mathrm{T} \Leftrightarrow$ 任意の$a \in |\mathcal{M}|$について，$[\![A]\!]_{v[a/x]} = \mathrm{T}$

- $[\![\forall x A]\!]_v = \mathrm{T}$を示すには，どのような要素$a$をもってきても，$[\![A]\!]_{v[a/x]} = \mathrm{T}$となることを示す．
- $[\![\forall x A]\!]_v = \mathrm{F}$を示すには，$[\![A]\!]_{v[a/x]} = \mathrm{F}$となるような要素を1つ見つけて，$[\![A]\!]_{v[a/x]} = \mathrm{F}$を示す．

$[\![\exists x A]\!]_v = \mathrm{T} \Leftrightarrow$ ある$a \in |\mathcal{M}|$が存在して，$[\![A]\!]_{v[a/x]} = \mathrm{T}$

- $[\![\exists x A]\!]_v = \mathrm{T}$を示すには，$[\![A]\!]_{v[a/x]} = \mathrm{T}$となるような要素を1つ見つけて，$[\![A]\!]_{v[a/x]} = \mathrm{T}$を示す．
- $[\![\exists x A]\!]_v = \mathrm{F}$を示すには，どのような要素$a$をもってきても，$[\![A]\!]_{v[a/x]} = \mathrm{F}$となることを示す．



すべてにではなく，必要なところだけに着目する．

| $[\![\exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_v$ | $m$ | $[\![\forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[m/\mathrm{x}]}$ | $n$ | $[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[m/\mathrm{x}][n/\mathrm{y}]}$ |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | | $a$ | T |
| | | | $b$ | F |
| | | F | $c$ | F |
| | $b$ | | $a$ | T |
| | | | $b$ | T |
| | | T | $c$ | T |
| | $c$ | | $a$ | F |
| | | | $b$ | F |
| T | | F | $c$ | T |

- $[\![\exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_v = \mathrm{T}$を示すには，$[\![\forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[b/\mathrm{x}]} = \mathrm{T}$を示せばよい．
- $[\![\forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[b/\mathrm{x}]} = \mathrm{T}$を示すには，どのような$n \in |\mathcal{M}|$についても，$[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[b/\mathrm{x}][n/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$ となることを示す．



すべてにではなく，必要なところだけに着目する．

| $[\![\exists \mathrm{y}\, \forall \mathrm{x}\, (\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_v$ | $m$ | $[\![\forall \mathrm{x}\, (\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[m/\mathrm{y}]}$ | $n$ | $[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[m/\mathrm{y}][n/\mathrm{x}]}$ |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | | $a$ | T |
| | | | $b$ | T |
| | | **F** | $c$ | **F** |
| | $b$ | | $a$ | T |
| | | | $b$ | T |
| | | **F** | $c$ | **F** |
| | $c$ | | $a$ | **F** |
| | | | $b$ | T |
| **F** | | **F** | $c$ | T |

- $[\![\exists \mathrm{y}\, \forall \mathrm{x}\, (\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_v = \mathrm{F}$を示すには，それぞれの要素$m \in |\mathcal{M}|$について，$[\![\forall \mathrm{x}\, (\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[m/\mathrm{y}]} = \mathrm{F}$ を示す．
- $[\![\forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[m/\mathrm{x}]} = \mathrm{F}$を示すには，($m \in |\mathcal{M}|$の値に応じて) $[\![\forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[m/\mathrm{x}][n/\mathrm{y}]} = \mathrm{F}$となる要素$n \in |\mathcal{M}|$を1つ見つければよい．



**例 17.9.** シグニチャ$L = \langle \{+^2, 0^0, \dots\}, \{<^2, \le^2, \dots\} \rangle$を考え，自然数集合の$L$-構造$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, \dots, <^{\mathcal{N}}, \le^{\mathcal{N}}, \dots \rangle$を考える．ただし，$+^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, <^{\mathcal{N}}, \le^{\mathcal{N}}$等は，通常の自然数上の対応する演算や関係を表わす．$[\![\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y})]\!]_v$を求めよ．

$[\![\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y})]\!]_v = \mathrm{T}$
$\Leftrightarrow$「任意の$y \in \mathbb{N}$について$[\![\mathrm{x} \approx \mathrm{y}]\!]_{v[x/\mathrm{x}][y/\mathrm{y}]} = \mathrm{F}$」が任意の$x \in \mathbb{N}$について成立
$\Leftrightarrow$「任意の$y \in \mathbb{N}$について$x \ne y$」が任意の$x \in \mathbb{N}$について成立
$\Leftrightarrow$ すべての$x \in \mathbb{N}$と$y \in \mathbb{N}$の組み合わせについて，$x \ne y$

となる．しかし，これは，$x = y$のとき，成立しない．

$[\![\mathrm{x} \approx \mathrm{y}]\!]_{v[0/\mathrm{x}][0/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$．よって，$[\![\neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y})]\!]_{v[0/\mathrm{x}][0/\mathrm{y}]} = \mathrm{F}$となるので，$[\![\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y})]\!]_v = \mathrm{F}$.



**例 17.10.** 前の例と同じく，自然数集合の$L$-構造$\mathcal{N}$を考える．
このとき，$[\![\exists \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx 5)]\!]_v$を求めよ．
(ただし，$5^0 \in \mathcal{F}$かつ$5^{\mathcal{N}} = 5 \in \mathbb{N}$とする．)

$[\![\exists \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx 5)]\!]_v = \mathrm{T}$
$\Leftrightarrow$「ある$y \in \mathbb{N}$が存在して，$[\![\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx 5]\!]_{v[x/\mathrm{x}][y/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$」がある$x \in \mathbb{N}$について成立
$\Leftrightarrow$「ある$y \in \mathbb{N}$が存在して，$x +^{\mathcal{N}} y = 5$」がある$x \in \mathbb{N}$について成立
$\Leftrightarrow$ ある$x \in \mathbb{N}$と$y \in \mathbb{N}$の組み合わせについて，$x +^{\mathcal{N}} y = 5$

となる．これは，例えば，$x = 2, y = 3$のとき成立する．

$[\![\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx 5]\!]_{v[2/\mathrm{x}][3/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$．よって，$[\![\exists \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx 5)]\!]_v = \mathrm{T}$.



**例 17.11.** 前の例と同じく，自然数集合の$L$-構造$\mathcal{N}$を考える．
このとき，$[\![\exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_v$を求めよ．

$[\![\exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_v = \mathrm{T}$
$\Leftrightarrow$「任意の$y \in \mathbb{N}$について$[\![\mathrm{x} \le \mathrm{y}]\!]_{v[x/\mathrm{x}][y/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$」となる$x \in \mathbb{N}$が存在
$\Leftrightarrow$「任意の$y \in \mathbb{N}$について$x \le^{\mathcal{N}} y$」となる$x \in \mathbb{N}$が存在

となる．これは$x$として$0$をとればよいから成立．

任意の$y \in \mathbb{N}$について$0 \le^{\mathcal{N}} y$が成立する．よって，$[\![\forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_{v[0/\mathrm{x}]} = \mathrm{T}$．よって，$[\![\exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} \le \mathrm{y})]\!]_v = \mathrm{T}$となる．

**例 17.12.** 前の例と同じく，自然数集合の$L$-構造$\mathcal{N}$を考える．
このとき，$[\![\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{x} < \mathrm{y})]\!]_v$を求めよ．

$[\![\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{x} < \mathrm{y})]\!]_v = \mathrm{T}$
$\Leftrightarrow$ 任意の$x \in \mathbb{N}$について,「$[\![\mathrm{x} < \mathrm{y}]\!]_{v[x/\mathrm{x}][y/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$となる$y \in \mathbb{N}$が存在」が成立
$\Leftrightarrow$「$x <^{\mathcal{N}} y$となる$y \in \mathbb{N}$が存在」が任意の$x \in \mathbb{N}$について成立

となる．これは，どのよう$x$についても，$y = x+1$をとれば$x <^{\mathcal{N}} y$となるから成立.

任意の$x \in \mathbb{N}$について$x <^{\mathcal{N}} x+1$が成立する．よって，任意の$x \in \mathbb{N}$について，$[\![\exists \mathrm{y}\, (\mathrm{x} < \mathrm{y})]\!]_{v[x/\mathrm{x}]} = \mathrm{T}$．よって，$[\![\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{x} < \mathrm{y})]\!]_v = \mathrm{T}$となる．



**演習 17.13.** シグニチャ$L = \langle \{+^2, 0^0, \times^2, \ldots\}, \{<^2, \leq^2, \ldots\} \rangle$を考え，整数集合の$L$-構造$\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, +^{\mathcal{Z}}, 0^{\mathcal{Z}}, \times^{\mathcal{Z}}, \ldots, <^{\mathcal{Z}}, \leq^{\mathcal{Z}}, \ldots \rangle$をとる．ただし，$+^{\mathcal{Z}}, 0^{\mathcal{Z}}, <^{\mathcal{Z}}, \leq^{\mathcal{Z}}$等として，通常の整数上の対応する演算や関係をとるものとする．
このとき，以下の真理値を求めよ．

**(1)** $[\![\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} < \mathrm{y})]\!]_v$
**(2)** $[\![\exists \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx 5)]\!]_v$
**(3)** $[\![\exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} \leq \mathrm{y})]\!]_v$
**(4)** $[\![\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx 12)]\!]_v$



**(解答)**
**(1)** 任意の$x, y \in \mathbb{Z}$について$[\![\mathrm{x} < \mathrm{y}]\!]_{v[x/\mathrm{x}][y/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$となるとき，真となる．しかし，$0 <^{\mathcal{Z}} 0$は成立しないから，$[\![\mathrm{x} < \mathrm{y}]\!]_{v[0/\mathrm{x}][0/\mathrm{y}]} = \mathrm{F}$．よって，$[\![\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} < \mathrm{y})]\!]_v = \mathrm{F}$.

**(2)** $2 +^{\mathcal{Z}} 3 = 5$であるから，$[\![\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx 5]\!]_{v[2/\mathrm{x}][3/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$．よって，$[\![\exists \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx 5)]\!]_v = \mathrm{T}$.

**(3)** どのような$x \in \mathbb{Z}$についても，$y = x-1$をとると，$x \leq^{\mathcal{Z}} y$は成立しない．従って,「任意の$y \in \mathbb{Z}$について$x \leq^{\mathcal{Z}} y$」が成立するような$x \in \mathbb{Z}$は存在しない．従って，$[\![\forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} \leq \mathrm{y})]\!]_{v[x/\mathrm{x}]} = \mathrm{F}$．よって，$[\![\exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} \leq \mathrm{y})]\!]_v = \mathrm{F}$.

**(4)** どのような$x \in \mathbb{Z}$についても，$y = 12 - x$をとると，$[\![\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx 12]\!]_{v[x/\mathrm{x}][y/\mathrm{y}]}$が成立．よって，$[\![\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx 12)]\!]_v = \mathrm{T}$.



**演習 17.14.** シグニチャ$L = \langle \{+^2, 0^0, \times^2, \ldots\}, \{<^2, \leq^2, \ldots\} \rangle$を考える．このとき，自然数集合の$L$-構造$\mathcal{N}$および整数集合の$L$-構造$\mathcal{Z}$のそれぞれについて，以下の値を求めよ．

**(1)** $[\![\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{y} < \mathrm{x})]\!]_v$
**(2)** $[\![\exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}) \to \mathrm{x} < \mathrm{y})]\!]_v$



**(1)** $\mathcal{N}$のとき．
$[\![\exists \mathrm{y}\, (\mathrm{y} < \mathrm{x})]\!]_{v[0/\mathrm{x}]} = \mathrm{F}$となるから，$[\![\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{y} < \mathrm{x})]\!]_v = \mathrm{F}$となる．

**(1)** $\mathcal{Z}$のとき．
$[\![\mathrm{y} < \mathrm{x}]\!]_{v[n/\mathrm{x}][n-1/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$となるから，任意の$n \in \mathbb{Z}$について，$[\![\exists \mathrm{y}\, (\mathrm{y} < \mathrm{x})]\!]_{v[n/\mathrm{x}]} = \mathrm{T}$が成立する．よって，$[\![\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{y} < \mathrm{x})]\!]_v = \mathrm{T}$となる．

**(2)** $\mathcal{N}$のとき．
$m = 0$のとき，$[\![\neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y})]\!]_{v[0/\mathrm{x}][m/\mathrm{y}]} = \mathrm{F}$より，$[\![\neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}) \to \mathrm{x} < \mathrm{y}]\!]_{v[0/\mathrm{x}][m/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$が成立．また，$m > 0$のとき，$[\![\mathrm{x} < \mathrm{y})]\!]_{v[0/\mathrm{x}][m/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$より，$[\![\neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}) \to \mathrm{x} < \mathrm{y}]\!]_{v[0/\mathrm{x}][m/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$が成立．よって，任意の$m \in \mathbb{N}$について，$[\![\neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}) \to \mathrm{x} < \mathrm{y}]\!]_{v[0/\mathrm{x}][m/\mathrm{y}]} = \mathrm{T}$が成立．よって，$[\![\forall \mathrm{y}\, (\neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}) \to \mathrm{x} < \mathrm{y})]\!]_{v[0/\mathrm{x}]} = \mathrm{T}$．従って，$[\![\exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}) \to \mathrm{x} < \mathrm{y})]\!]_v = \mathrm{T}$となる．

**(2)** $\mathcal{Z}$のとき．
$[\![\neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}) \to \mathrm{x} < \mathrm{y}]\!]_{v[n/\mathrm{x}][n-1/\mathrm{x}]} = \mathrm{F}$となるので，任意の$n \in \mathbb{Z}$について，$[\![\forall \mathrm{y}\, (\neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}) \to \mathrm{x} < \mathrm{y})]\!]_{v[n/\mathrm{x}]} = \mathrm{F}$．よって，$[\![\exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}) \to \mathrm{x} < \mathrm{y})]\!]_v = \mathrm{F}$となる．



## まとめ

- ハッセの図式と半順序集合
- 述語論理式の解釈
  有限集合の場合の，計算表を用いた方法
  無限集合を含む一般的な場合の方法