

2019年度 数理論理学

講義資料(17)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

- 半順序集合とハッセの図式
- 述語論理式の解釈 (1)
- 述語論理式の解釈 (2)

半順序集合(復習)

ここでは，意味論の演習の題材として用いる半順序集合について復習し，半順序集合を表わすハッセの図式について説明する．

定義 17.1. 集合 A 上の 2 項関係 R が次の性質を満たすとき， R を集合 A 上の **半順序** とよぶ．

- (1) 任意の $a \in A$ について， aRa ，
- (2) 任意の $a, b, c \in A$ について， aRb かつ bRc ならば aRc ，
- (3) 任意の $a, b \in A$ について， aRb かつ bRa ならば， $a = b$ ．

(1), (2), (3) をそれぞれ **反射律**，**推移律**，**反対称律** とよんだ．以下では，半順序を表わすのに記号 $\leq$ を用いる．

半順序 R をもつ集合 A のことを **半順序集合** とよぶ．

例1. 自然数の大小関係 $\leq$ は，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ 上の半順序.

例2. 自然数の大小関係 $\leq$ を $n \leq m \stackrel{\text{def}}{\iff} “m \text{ は } n \text{ で割り切れる}”$ と定義すると， $\leq$ は $\mathbb{N}$ 上の半順序.

例3. 集合の部分集合関係 $\subseteq$ は，自然数の冪集合 $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{U \mid U \subseteq \mathbb{N}\}$ 上の半順序.

例1の半順序は，どの要素同士も大小関係がある (較べられる) という性質をもつ. このような半順序は，**全順序**とよばれる.

例2の半順序については，例えば $3 \leq 5$ も $5 \leq 3$ も成立しないので，較べられない要素も存在する. よって，例2の半順序は，全順序でない. 例3も同様に全順序でない.

演習 17.2. $M = \{a, b, c\}$ とする. 以下の $\leq$ のうち, M 上の半順序となっているものはどれか. すべて挙げよ.

(1) $\leq = \{\langle a, a \rangle\}$

(2) $\leq = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle\}$

(3) $\leq = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$

(4) $\leq = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$

(5) $\leq = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle\}$

(6) $\leq = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle\}$

演習 17.2. $M = \{a, b, c\}$ とする. 以下の $\leq$ のうち, M 上の半順序となっているものはどれか. すべて挙げよ.

$$(1) \leq = \{\langle a, a \rangle\}$$

$$(2) \leq = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle\}$$

$$(3) \leq = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$$

$$(4) \leq = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$$

$$(5) \leq = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle\}$$

$$(6) \leq = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle\}$$

(1): 反射律が成立していないので半順序でない.

(3): 反対称律が成立していないので半順序でない.

(4): 推移律が成立していないので半順序でない.

(2), (5), (6)は半順序.

半順序 $\leq$ と関係 $<$

半順序 $\leq$ を用いて関係 $\geq, <, >$ を定義する：

$$x \geq y \stackrel{\text{def}}{\iff} y \leq x$$

$$x < y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \leq y \wedge x \neq y$$

$$x > y \stackrel{\text{def}}{\iff} y \leq x \wedge x \neq y$$

このとき，関係 $<$ は**非反射的かつ推移的な関係**であり，

$$x \leq y \iff x < y \vee x = y$$

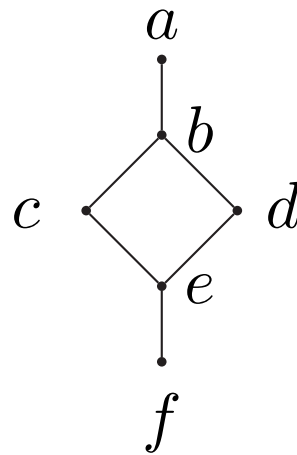
$$x \geq y \iff y > x \vee x = y$$

$$x > y \iff y < x$$

が成立．つまり， $<$ が決まれば， $\leq, \geq, >$ も決まる．（このため， $<$ を基本にとって $<$ を半順序とよぶ場合もある．）

ハッセの図式(ハッセ図)

以下の約束に従って，半順序集合を図で表わす: 要素は頂点で表わす. 頂点 x と頂点 y が線で繋がっているのは， $x < y$ または $x > y$ であることを表わし，その大小は位置の上下で表わす(下にあるのが小さい方).



- (1) この半順序集合の台集合は $\{a, b, c, d, e, f\}$.
- (2) a は1番大きい要素. つまり, 任意の x について, $x \leq a$ が成立する.
- (3) 要素 c, d については, $c \leq d$ も $d \leq c$ も成立しない. (半順序関係では, 大小関係はつかなくても良い.)
- (4) $x \in \{a, b\}$ について $c < x$ が成立する.
- (5) $x \in \{a, b, c, d\}$ について $e < x$ が成立する.

$\leq$ が全順序であることは, ハッセ図が縦1列となっていることと等しい.

例 17.3. $M = \{a, b, c\}$ とする. 以下の場合のそれぞれについて, 半順序集合 M を表すハッセ図はどのようなになるか考えよ.

(1) $< = \{\langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle\}$ のとき.

(2) $< = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle\}$ のとき.

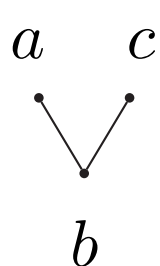
(3) $< = \{\langle b, c \rangle\}$ のとき.

例 17.3. $M = \{a, b, c\}$ とする. 以下の場合のそれぞれについて, 半順序集合 M を表すハッセ図はどのようなになるか考えよ.

(1) $< = \{\langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle\}$ のとき.

(2) $< = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle\}$ のとき.

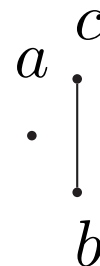
(3) $< = \{\langle b, c \rangle\}$ のとき.



(1)

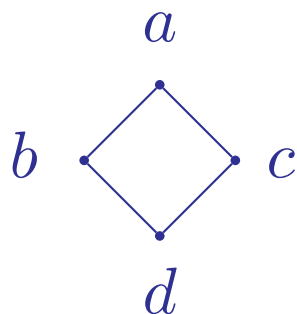


(2)



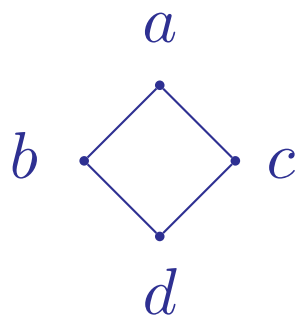
(3)

例 17.4. $L = \langle \emptyset, \{\leq^2, <^2, \geq^2, >^2\} \rangle$ をシグニチャ, L -構造 $\mathcal{M} = \langle M, \leq^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}, \geq^{\mathcal{M}}, >^{\mathcal{M}} \rangle$ を以下のハッセ図で表わされる半順序集合とする.



とする. このとき, $\leq^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}, \geq^{\mathcal{M}}, >^{\mathcal{M}}$ がどのようなようになるか考えよ.

例 17.4. $L = \langle \emptyset, \{\leq^2, <^2, \geq^2, >^2\} \rangle$ をシグニチャ, L -構造 $\mathcal{M} = \langle M, \leq^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}, \geq^{\mathcal{M}}, >^{\mathcal{M}} \rangle$ を以下のハッセ図で表わされる半順序集合とする.



とする. このとき, $\leq^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}, \geq^{\mathcal{M}}, >^{\mathcal{M}}$ がどのようなようになるか考えよ.

$$\begin{aligned}
 \leq^{\mathcal{M}} &= \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, a \rangle, \langle d, a \rangle, \langle d, b \rangle, \langle d, c \rangle \} \\
 <^{\mathcal{M}} &= \{ \langle b, a \rangle, \langle c, a \rangle, \langle d, a \rangle, \langle d, b \rangle, \langle d, c \rangle \} \\
 \geq^{\mathcal{M}} &= \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, d \rangle \} \\
 >^{\mathcal{M}} &= \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, d \rangle \}
 \end{aligned}$$

目次

- 半順序集合とハッセの図式
- 述語論理式の解釈 (1)
- 述語論理式の解釈 (2)

付値のもとでの述語論理式の解釈

付値のもとでの述語論理式の解釈について説明する.

定義 17.5. A をシグニチャ L 上の述語論理式, v を L -構造 $\mathcal{M}$ への付値とする. このとき, 付値 v にもとづく A の解釈 $\llbracket A \rrbracket_v$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned}\llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v &= \begin{cases} \text{T} & (\langle \llbracket t_1 \rrbracket_v, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v \rangle \in P^{\mathcal{M}} \text{ のとき}) \\ \text{F} & (\langle \llbracket t_1 \rrbracket_v, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v \rangle \notin P^{\mathcal{M}} \text{ のとき}) \end{cases} \\ \llbracket s \approx t \rrbracket_v &= \begin{cases} \text{T} & (\llbracket s \rrbracket_v = \llbracket t \rrbracket_v \text{ のとき}) \\ \text{F} & (\llbracket s \rrbracket_v \neq \llbracket t \rrbracket_v \text{ のとき}) \end{cases} \\ \llbracket \perp \rrbracket_v &= \text{F} \\ \llbracket \top \rrbracket_v &= \text{T} \\ \llbracket \neg B \rrbracket_v &= \begin{cases} \text{T} & (\llbracket B \rrbracket_v = \text{F} \text{ のとき}) \\ \text{F} & (\llbracket B \rrbracket_v = \text{T} \text{ のとき}) \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\llbracket B \wedge C \rrbracket_v &= \begin{cases} \text{T} & (\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{T} \text{ のとき}) \\ \text{F} & (\text{それ以外}) \end{cases} \\
\llbracket B \vee C \rrbracket_v &= \begin{cases} \text{F} & (\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{F} \text{ のとき}) \\ \text{T} & (\text{それ以外}) \end{cases} \\
\llbracket B \rightarrow C \rrbracket_v &= \begin{cases} \text{F} & (\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}, \llbracket C \rrbracket_v = \text{F} \text{ のとき}) \\ \text{T} & (\text{それ以外}) \end{cases} \\
\llbracket \forall x B \rrbracket_v &= \begin{cases} \text{T} & (\text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について,} \\ & \llbracket B \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T} \text{ のとき}) \\ \text{F} & (\text{それ以外}) \end{cases} \\
\llbracket \exists x B \rrbracket_v &= \begin{cases} \text{T} & (\text{ある } a \in |\mathcal{M}| \text{ が存在して,} \\ & \llbracket B \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T} \text{ のとき}) \\ \text{F} & (\text{それ以外}) \end{cases}
\end{aligned}$$

全称と存在の解釈の直観的な意味

(復習) 付値は, 変数を (L -構造の) どの要素に対応させるか, を表わす. $v[a/x]$ は x を a に対応させるように v を更新した付値.

$$\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{T} \Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$$

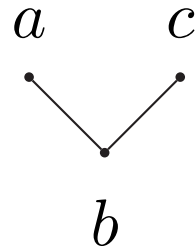
$\forall x A$ (の解釈) が真 $\Leftrightarrow x$ を (L -構造の) どの要素にとっても,
 A (の解釈) が真.

$$\llbracket \exists x A \rrbracket_v = \text{T} \Leftrightarrow \text{ある } a \in |\mathcal{M}| \text{ が存在して, } \llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$$

$\exists x A$ (の解釈) が真 $\Leftrightarrow x$ を (L -構造の) どれかの要素にとると,
 A (の解釈) が真.

解釈の計算

例. $L = \langle \emptyset, \{\leq^2, <^2, \geq^2, >^2\} \rangle$ をシグニチャ, L -構造 $\mathcal{M} = \langle M, \leq^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}, \geq^{\mathcal{M}}, >^{\mathcal{M}} \rangle$ を以下のハッセ図で表わされる半順序集合, v を任意の付値とするとき, $\llbracket \exists x \forall y (x \leq y) \rrbracket_v$ を計算する.



$M = \{a, b, c\}$ であるから, $\llbracket \exists x \forall y (x \leq y) \rrbracket_v$ の値は, もし,

$\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[a/x]}, \llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[b/x]}, \llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[c/x]},$

のいずれかが真になれば真, これらが3つとも偽ならば偽, となる. これらの3つの値について, 次に調べる.

(1) $\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[a/x]}$

定義より，この値は，

$$\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[a/x][a/y]}, \llbracket x \leq y \rrbracket_{v[a/x][b/y]}, \llbracket x \leq y \rrbracket_{v[a/x][c/y]},$$

の値が全て真となるとき真，そうでないときは偽となる．

(1-a) $\langle a, a \rangle \in \leq^{\mathcal{M}}$ より， $\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[a/x][a/y]} = \text{T}.$

(1-b) $\langle a, b \rangle \notin \leq^{\mathcal{M}}$ より， $\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = \text{F}.$

(1-c) $\langle a, c \rangle \notin \leq^{\mathcal{M}}$ より， $\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[a/x][c/y]} = \text{F}.$

以上より， $\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[a/x]} = \text{F}.$

(2) $\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[b/x]}$

定義より，この値は，

$$\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[b/x][a/y]}, \llbracket x \leq y \rrbracket_{v[b/x][b/y]}, \llbracket x \leq y \rrbracket_{v[b/x][c/y]},$$

の値が全て真となるとき真，そうでないときは偽となる．

$$(2\text{-a}) \langle b, a \rangle \in \leq^{\mathcal{M}} \text{より}, \llbracket x \leq y \rrbracket_{v[b/x][a/y]} = \text{T}.$$

$$(2\text{-b}) \langle b, b \rangle \in \leq^{\mathcal{M}} \text{より}, \llbracket x \leq y \rrbracket_{v[b/x][b/y]} = \text{T}.$$

$$(2\text{-c}) \langle b, c \rangle \in \leq^{\mathcal{M}} \text{より}, \llbracket x \leq y \rrbracket_{v[b/x][c/y]} = \text{T}.$$

以上より， $\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[b/x]} = \text{T}.$

(3) $\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[c/x]}$

定義より，この値は，

$$\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[c/x][a/y]}, \llbracket x \leq y \rrbracket_{v[c/x][b/y]}, \llbracket x \leq y \rrbracket_{v[c/x][c/y]},$$

の値が全て真となるとき真，そうでないときは偽となる．

(3-a) $\langle c, a \rangle \notin \leq^{\mathcal{M}}$ より， $\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[c/x][a/y]} = \text{F}$.

(3-b) $\langle c, b \rangle \notin \leq^{\mathcal{M}}$ より， $\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[c/x][b/y]} = \text{F}$.

(3-c) $\langle c, c \rangle \in \leq^{\mathcal{M}}$ より， $\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[c/x][c/y]} = \text{T}$.

以上より， $\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[c/x]} = \text{F}$.

(1),(2),(3)より， $\llbracket \exists x \forall y (x \leq y) \rrbracket_v = \text{T}$. (例終わり)

前例の計算を，もう少しわかりやすく表で書いてみる．

$\llbracket \exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{x} \leq \mathbf{y}) \rrbracket_v$	m	$\llbracket \forall \mathbf{y} (\mathbf{x} \leq \mathbf{y}) \rrbracket_{v[m/\mathbf{x}]}$	n	$\llbracket \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \rrbracket_{v[m/\mathbf{x}][n/\mathbf{y}]}$
T	a	F	a	T
			b	F
			c	F
	b	T	a	T
			b	T
			c	T
	c	F	a	F
			b	F
			c	T

点線の縦線では，右側の真理値のどれかが真なら，左側の真理値が真となる．

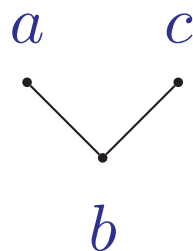
二重線の縦線では，右側の真理値のすべてが真なら，左側の真理値が真となる．

$\llbracket \exists x \forall y (x \leq y) \rrbracket_v$	m	$\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[m/x]}$	n	$\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[m/x][n/y]}$
T	a	F	a	T
			b	F
			c	F
	b	T	a	T
			b	T
			c	T
	c	F	a	F
			b	F
			c	T

また，実際には，全ての計算をする必要はない．今の例では，(1-a),(1-b)を計算した段階で，(1)の解釈がFと定まるので(1-c)の計算は必要ない．また，(2)を計算した段階で，全体の述語論理式の解釈が定まるので(3)の計算は必要ない．

$\llbracket \exists x \forall y (x \leq y) \rrbracket_v$	m	$\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[m/x]}$	n	$\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[m/x][n/y]}$
T	a	F	a	T
			b	F
			c	—
	b	T	a	T
			b	T
			c	T
	c	—	a	
			b	
			c	

演習 17.6. 以下のハッ セ図で与えられる 半順序集合 M を考える.



このとき, $\llbracket \exists y \forall x (x \leq y) \rrbracket_v$ の真理値を以下の表を埋めることで計算してみよ.

$\llbracket \exists y \forall x (x \leq y) \rrbracket_v$	m	$\llbracket \forall x (x \leq y) \rrbracket_{v[m/y]}$	n	$\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[m/y][n/x]}$
	a		a	
			b	
			c	
	b		a	
			b	
			c	
	c		a	
			b	
			c	

(解答)

$\llbracket \exists y \forall x (x \leq y) \rrbracket_v$	m	$\llbracket \forall x (x \leq y) \rrbracket_{v[m/y]}$	n	$\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[m/y][n/x]}$
F	a	F	a	T
			b	T
			c	F
	b	F	a	F
			b	—
			c	—
	c	F	a	F
			b	—
			c	—

正確な記述ではなく なるが、付値を省略して前ページの表を以下のように書くともう少し簡単.

$\llbracket \exists y \forall x (x \leq y) \rrbracket$	y	$\llbracket \forall x (x \leq y) \rrbracket$	x	$\llbracket x \leq y \rrbracket$
F	a	F	a	T
			b	T
			c	F
	b	F	a	F
			b	—
			c	—
	c	F	a	F
			b	—
			c	—

演習 17.7. 演習 17.6と同じく，半順序集合による L -構造を考える．このとき， $\llbracket \exists x \forall y (x \leq y \vee y \leq x \rightarrow x \approx y) \rrbracket_v$ の真理値を以下の表を埋めることで計算してみよ．

$$\exists x \forall y (\underline{x \leq y}_P \vee \underline{y \leq x}_Q \rightarrow \underline{x \approx y}_R) \quad A$$

$\llbracket \exists x \forall y A \rrbracket$	x	$\llbracket \forall y A \rrbracket$	y	$\llbracket A \rrbracket$ $\llbracket P \vee Q \rightarrow R \rrbracket$	$\llbracket P \vee Q \rrbracket$	$\llbracket P \rrbracket$ $\llbracket x \leq y \rrbracket$	$\llbracket Q \rrbracket$ $\llbracket y \leq x \rrbracket$	$\llbracket R \rrbracket$ $\llbracket x \approx y \rrbracket$
	a		a					
			b					
			c					
	b		a					
			b					
			c					
	c		a					
			b					
			c					

(解答)

$$\frac{\exists x \forall y (\underline{x \leq y}_P \vee \underline{y \leq x}_Q \rightarrow \underline{x \approx y}_R)}{A}$$

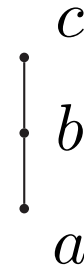
$\llbracket \exists x \forall y A \rrbracket$	x	$\llbracket \forall y A \rrbracket$	y	$\llbracket A \rrbracket$ $\llbracket P \vee Q \rightarrow R \rrbracket$	$\llbracket P \vee Q \rrbracket$	$\llbracket P \rrbracket$ $\llbracket x \leq y \rrbracket$	$\llbracket Q \rrbracket$ $\llbracket y \leq x \rrbracket$	$\llbracket R \rrbracket$ $\llbracket x \approx y \rrbracket$
F	a	F	a	T	T	T	T	T
			b	F	T	F	T	F
			c	T	F	F	F	F
	b	F	a	F	T	T	F	F
			b	T	T	T	T	T
			c	F	T	T	F	F
	c	F	a	T	F	F	F	F
			b	F	T	F	T	F
			c	T	T	T	T	T

よって, $\llbracket \exists x \forall y (x \leq y \vee y \leq x \rightarrow x \approx y) \rrbracket_v = F$.

演習 17.8. 下のハッセ図で与えられる半順序集合による L -構造を考える. このとき, 以下の真理値を計算せよ.

(1) $\llbracket \forall x \forall y (x \leq y \vee y < x) \rrbracket_v$

(2) $\llbracket \forall x (\exists y (x < y) \vee \exists y (y < x)) \rrbracket_v$



(解答)

(1) $\forall x \forall y (\underline{x \leq y}_P \vee \underline{y < x}_Q)$

$\llbracket \forall x \forall y (P \vee Q) \rrbracket$	x	$\llbracket \forall y (P \vee Q) \rrbracket$	y	$\llbracket P \vee Q \rrbracket$	$\llbracket P \rrbracket$ $\llbracket x \leq y \rrbracket$	$\llbracket Q \rrbracket$ $\llbracket y < x \rrbracket$
T	a	T	a	T	T	F
			b	T	T	F
			c	T	T	F
	b	T	a	T	F	T
			b	T	T	F
			c	T	T	F
	c	T	a	T	F	T
			b	T	F	T
			c	T	T	F

よって, $\llbracket \forall x \forall y (x \leq y \vee y < x) \rrbracket_v = \text{T}.$

(解答)

$$(2) \quad \frac{\frac{\frac{\forall x (\exists y (x < y))_{P_B} \vee \exists y (y < x)_{Q_C}}{C_A}}{A}}$$

$\llbracket \forall x A \rrbracket$	x	$\llbracket A \rrbracket$ $\llbracket B \vee C \rrbracket$	$\llbracket B \rrbracket$ $\llbracket \exists y P \rrbracket$	y	$\llbracket P \rrbracket$ $\llbracket x < y \rrbracket$	$\llbracket C \rrbracket$ $\llbracket \exists y Q \rrbracket$	y	$\llbracket Q \rrbracket$ $\llbracket y < x \rrbracket$
T	a	T	T	a	F	F	a	F
				b	T		b	F
				c	T		c	F
	b	T	T	a	F	T	a	T
				b	F		b	F
				c	T		c	F
	c	T	F	a	F	T	a	T
				b	F		b	T
				c	F		c	F

よって, $\llbracket \forall x (\exists y (x < y) \vee \exists y (y < x)) \rrbracket_v = T$.

目次

- 半順序集合とハッセの図式
- 述語論理式の解釈 (1)
- 述語論理式の解釈 (2)

述語論理式の解釈を求める： 計算表を離れて

前節では，表を使って述語論理式の解釈の計算を行った．

しかし，このような計算表を書けるのは， L -構造の台集合が有限集合の場合だけ．

一方， L -構造の台集合は無限集合でもよい．（例えば，台集合として，自然数集合や整数集合などを用いてもよい．）

ここでは，有限半順序集合以外のさまざまな L -構造を用いて，述語論理式の解釈について演習する．

全称・存在の解釈を求めるには (基本戦略)

$\llbracket \forall x A \rrbracket_v = T \Leftrightarrow$ 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = T$

- $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = T$ を示すには, どのような要素 a をもってきても, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = T$ となることを示す.
- $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = F$ を示すには, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = F$ となるような要素を1つ見つけて, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = F$ を示す.

$\llbracket \exists x A \rrbracket_v = T \Leftrightarrow$ ある $a \in |\mathcal{M}|$ が存在して, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = T$

- $\llbracket \exists x A \rrbracket_v = T$ を示すには, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = T$ となるような要素を1つ見つけて, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = T$ を示す.
- $\llbracket \exists x A \rrbracket_v = F$ を示すには, どのような要素 a をもってきても, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = F$ となることを示す.

すべてにではなく，必要なところだけに着目する．

$\llbracket \exists x \forall y (x \leq y) \rrbracket_v$	m	$\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[m/x]}$	n	$\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[m/x][n/y]}$
T	a	F	a	T
			b	F
			c	F
	b	T	a	T
			b	T
			c	T
	c	F	a	F
			b	F
			c	T

• $\llbracket \exists x \forall y (x \leq y) \rrbracket_v = \text{T}$ を示すには， $\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[b/x]} = \text{T}$ を示せばよい．

• $\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[b/x]} = \text{T}$ を示すには，どのような $n \in |\mathcal{M}|$ についても， $\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[b/x][n/y]} = \text{T}$ となることを示す．

すべてにではなく，必要なところだけに着目する．

$\llbracket \exists y \forall x (x \leq y) \rrbracket_v$	m	$\llbracket \forall x (x \leq y) \rrbracket_{v[m/y]}$	n	$\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[m/y][n/x]}$
F	a	F	a	T
			b	T
			c	F
	b	F	a	T
			b	T
			c	F
	c	F	a	F
			b	T
			c	T

- $\llbracket \exists y \forall x (x \leq y) \rrbracket_v = F$ を示すには，それぞれの要素 $m \in |\mathcal{M}|$ について， $\llbracket \forall x (x \leq y) \rrbracket_{v[m/y]} = F$ を示す．
- $\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[m/x]} = F$ を示すには，($m \in |\mathcal{M}|$ の値に応じて) $\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[m/x][n/y]} = F$ となる要素 $n \in |\mathcal{M}|$ を **1** つ見つければよい．

例 17.9. シグニチャ $L = \langle \{+^2, 0^0, \dots\}, \{<^2, \leq^2, \dots\} \rangle$ を考え、自然数集合の L -構造 $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, \dots, <^{\mathcal{N}}, \leq^{\mathcal{N}}, \dots \rangle$ を考える。ただし、 $+^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, <^{\mathcal{N}}, \leq^{\mathcal{N}}$ 等は、通常 of 自然数上の対応する演算や関係を表わす。 $\llbracket \forall x \forall y \neg(x \approx y) \rrbracket_v$ を求めよ。

$$\llbracket \forall x \forall y \neg(x \approx y) \rrbracket_v = \text{T}$$

$\Leftrightarrow$ 「任意の $y \in \mathbb{N}$ について $\llbracket x \approx y \rrbracket_{v[x/x][y/y]} = \text{F}$ 」が任意の $x \in \mathbb{N}$ について成立

$\Leftrightarrow$ 「任意の $y \in \mathbb{N}$ について $x \neq y$ 」が任意の $x \in \mathbb{N}$ について成立

$\Leftrightarrow$ すべての $x \in \mathbb{N}$ と $y \in \mathbb{N}$ の組み合わせについて、 $x \neq y$

となる。しかし、これは、 $x = y$ のとき、成立しない。

$\llbracket x \approx y \rrbracket_{v[0/x][0/y]} = \text{T}$. よって、 $\llbracket \neg(x \approx y) \rrbracket_{v[0/x][0/y]} = \text{F}$ となるので、 $\llbracket \forall x \forall y \neg(x \approx y) \rrbracket_v = \text{F}$.

例 17.10. 前の例と同じく，自然数集合の L -構造 $\mathcal{N}$ を考える．

このとき， $\llbracket \exists x \exists y (x + y \approx 5) \rrbracket_v$ を求めよ．

(ただし， $5^0 \in \mathcal{F}$ かつ $5^{\mathcal{N}} = 5 \in \mathbb{N}$ とする．)

$$\llbracket \exists x \exists y (x + y \approx 5) \rrbracket_v = \text{T}$$

$\Leftrightarrow$ 「ある $y \in \mathbb{N}$ が存在して， $\llbracket x + y \approx 5 \rrbracket_{v[x/x][y/y]} = \text{T}$ 」がある $x \in \mathbb{N}$ について成立

$\Leftrightarrow$ 「ある $y \in \mathbb{N}$ が存在して， $x +^{\mathcal{N}} y = 5$ 」がある $x \in \mathbb{N}$ について成立

$\Leftrightarrow$ ある $x \in \mathbb{N}$ と $y \in \mathbb{N}$ の組み合わせについて， $x +^{\mathcal{N}} y = 5$

となる．これは，例えば， $x = 2, y = 3$ のとき成立する．

$\llbracket x + y \approx 5 \rrbracket_{v[2/x][3/y]} = \text{T}$. よって， $\llbracket \exists x \exists y (x + y \approx 5) \rrbracket_v = \text{T}$.

例 17.11. 前の例と同じく，自然数集合の L -構造 $\mathcal{N}$ を考える．

このとき， $\llbracket \exists x \forall y (x \leq y) \rrbracket_v$ を求めよ．

$$\llbracket \exists x \forall y (x \leq y) \rrbracket_v = \text{T}$$

$\Leftrightarrow$ 「任意の $y \in \mathbb{N}$ について $\llbracket x \leq y \rrbracket_{v[x/x][y/y]} = \text{T}$ 」となる $x \in \mathbb{N}$ が存在

$\Leftrightarrow$ 「任意の $y \in \mathbb{N}$ について $x \leq^{\mathcal{N}} y$ 」となる $x \in \mathbb{N}$ が存在

となる．これは x として 0 をとればよいから成立．

任意の $y \in \mathbb{N}$ について $0 \leq^{\mathcal{N}} y$ が成立する．よって，
 $\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[0/x]} = \text{T}$ ．よって， $\llbracket \exists x \forall y (x \leq y) \rrbracket_v = \text{T}$
となる．

例 17.12. 前の例と同じく，自然数集合の L -構造 $\mathcal{N}$ を考える．

このとき， $\llbracket \forall x \exists y (x < y) \rrbracket_v$ を求めよ．

$$\llbracket \forall x \exists y (x < y) \rrbracket_v = \text{T}$$

$\Leftrightarrow$ 任意の $x \in \mathbb{N}$ について，「 $\llbracket x < y \rrbracket_{v[x/x][y/y]} = \text{T}$ となる $y \in \mathbb{N}$ が存在」が成立

$\Leftrightarrow$ 「 $x <^{\mathcal{N}} y$ となる $y \in \mathbb{N}$ が存在」が任意の $x \in \mathbb{N}$ について成立

となる．これは，どのような x についても， $y = x + 1$ をとれば $x <^{\mathcal{N}} y$ となるから成立．

任意の $x \in \mathbb{N}$ について $x <^{\mathcal{N}} x + 1$ が成立する． よって，任意の $x \in \mathbb{N}$ について， $\llbracket \exists y (x < y) \rrbracket_{v[x/x]} = \text{T}$ ． よって， $\llbracket \forall x \exists y (x < y) \rrbracket_v = \text{T}$ となる．

演習 17.13. シグニチャ $L = \langle \{+^2, 0^0, \times^2, \dots\}, \{<^2, \leq^2, \dots\} \rangle$ を考え, 整数集合の L -構造 $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, +^{\mathcal{Z}}, 0^{\mathcal{Z}}, \times^{\mathcal{Z}}, \dots, <^{\mathcal{Z}}, \leq^{\mathcal{Z}}, \dots \rangle$ をとる. ただし, $+^{\mathcal{Z}}, 0^{\mathcal{Z}}, <^{\mathcal{Z}}, \leq^{\mathcal{Z}}$ 等として, 通常の整数上の対応する演算や関係をとるものとする. このとき, 以下の真理値を求めよ.

- (1) $\llbracket \forall x \forall y (x < y) \rrbracket_v$
- (2) $\llbracket \exists x \exists y (x + y \approx 5) \rrbracket_v$
- (3) $\llbracket \exists x \forall y (x \leq y) \rrbracket_v$
- (4) $\llbracket \forall x \exists y (x + y \approx 12) \rrbracket_v$

(解答)

(1) 任意の $x, y \in \mathbb{Z}$ について $\llbracket x < y \rrbracket_{v[x/x][y/y]} = T$ となる
とき, 真となる. しかし, $0 <^{\mathbb{Z}} 0$ は成立しないから, $\llbracket x < y \rrbracket_{v[0/x][0/y]} = F$. よって, $\llbracket \forall x \forall y (x < y) \rrbracket_v = F$.

(2) $2 +^{\mathbb{Z}} 3 = 5$ であるから, $\llbracket x + y \approx 5 \rrbracket_{v[2/x][3/y]} = T$. よっ
て, $\llbracket \exists x \exists y (x + y \approx 5) \rrbracket_v = T$.

(3) どのような $x \in \mathbb{Z}$ についても, $y = x - 1$ をとると, $x \leq^{\mathbb{Z}} y$
は成立しない. 従って, 「任意の $y \in \mathbb{Z}$ について $x \leq^{\mathbb{Z}} y$ 」
が成立するような $x \in \mathbb{Z}$ は存在しない. 従って, $\llbracket \forall y (x \leq y) \rrbracket_{v[x/x]} = F$.
よって, $\llbracket \exists x \forall y (x \leq y) \rrbracket_v = F$.

(4) どのような $x \in \mathbb{Z}$ についても, $y = 12 - x$ をとると,
 $\llbracket x + y \approx 12 \rrbracket_{v[x/x][y/y]}$ が成立. よって, $\llbracket \forall x \exists y (x + y \approx 12) \rrbracket_v = T$.

演習 17.14. シグニチャ $L = \langle \{+^2, 0^0, \times^2, \dots\}, \{<^2, \leq^2, \dots\} \rangle$ を考える. このとき, 自然数集合の L -構造 $\mathcal{N}$ および整数集合の L -構造 $\mathcal{Z}$ のそれぞれについて, 以下の値を求めよ.

(1) $\llbracket \forall x \exists y (y < x) \rrbracket_v$

(2) $\llbracket \exists x \forall y (\neg(x \approx y) \rightarrow x < y) \rrbracket_v$

(1) $\mathcal{N}$ のとき.

$\llbracket \exists y (y < x) \rrbracket_{v[0/x]} = F$ となるから, $\llbracket \forall x \exists y (y < x) \rrbracket_v = F$ となる.

(1) $\mathcal{Z}$ のとき.

$\llbracket y < x \rrbracket_{v[n/x][n-1/y]} = T$ となるから, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ について, $\llbracket \exists y (y < x) \rrbracket_{v[n/x]} = T$ が成立する. よって, $\llbracket \forall x \exists y (y < x) \rrbracket_v = T$ となる.

(2) $\mathcal{N}$ のとき.

$m = 0$ のとき, $\llbracket \neg(x \approx y) \rrbracket_{v[0/x][m/y]} = F$ より, $\llbracket \neg(x \approx y) \rightarrow x < y \rrbracket_{v[0/x][m/y]} = T$ が成立. また, $m > 0$ のとき, $\llbracket x < y \rrbracket_{v[0/x][m/y]} = T$ より, $\llbracket \neg(x \approx y) \rightarrow x < y \rrbracket_{v[0/x][m/y]} = T$ が成立. よって, 任意の $m \in \mathbb{N}$ について, $\llbracket \neg(x \approx y) \rightarrow x < y \rrbracket_{v[0/x][m/y]} = T$ が成立. よって, $\llbracket \forall y (\neg(x \approx y) \rightarrow x < y) \rrbracket_{v[0/x]} = T$. 従って, $\llbracket \exists x \forall y (\neg(x \approx y) \rightarrow x < y) \rrbracket_v = T$ となる.

(2) $\mathcal{Z}$ のとき.

$\llbracket \neg(x \approx y) \rightarrow x < y \rrbracket_{v[n/x][n-1/x]} = F$ となるので, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ について, $\llbracket \forall y (\neg(x \approx y) \rightarrow x < y) \rrbracket_{v[n/x]} = F$. よって, $\llbracket \exists x \forall y (\neg(x \approx y) \rightarrow x < y) \rrbracket_v = F$ となる.

まとめ

- ハッ セの図式と 半順序集合
- 述語論理式の解釈
 - 有限集合の場合の，計算表を用いた方法
 - 無限集合を含む一般的な場合の方法