

2019年度 数理論理学

講義資料(18)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

モデルと反例, 充足可能性

定義 18.3. A をシグニチャ L 上の述語論理式とする. L -構造 $\mathcal{M}$ が $\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{T}$ を満たすとき, $\mathcal{M}$ を A の **モデル** とよぶ.

定義 18.4. A をシグニチャ L 上の述語論理式とする. L -構造 $\mathcal{M}$ が $\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{F}$ を満たすとき, $\mathcal{M}$ を A の **反例** とよぶ.

定義から, **恒真でない述語論理式には反例があること**,
そして, **反例がある述語論理式は恒真でないこと**がわかる.

定義 18.5. A をシグニチャ L 上の述語論理式とする. A のモデルが存在するとき, A は **充足可能** であるという.

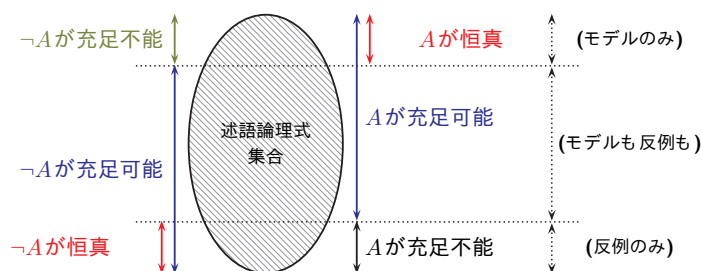
定義から, A が恒真であることと $\neg A$ が充足不能であることは同値となる.

3/52

目次

- 述語論理式の恒真性
- 述語論理式の論理的同値性
- 代入の性質

述語論理式の集合の全体像



4/52

述語論理式の解釈

命題論理式の真偽は命題変数への付値によって決まった. 述語論理の場合は, L -構造を 1 つ与えると, 述語論理式の真偽が決まる.

定義 18.1. A をシグニチャ L 上の述語論理式とする. L -構造 $\mathcal{M}$ における A の解釈 $\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}}$ を以下のように定義する:

$$\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \begin{cases} \text{T} & (\text{任意の付値 } v \text{ について, } \llbracket A \rrbracket_v = \text{T}) \\ \text{F} & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

$\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{T}$ となるとき, A は $\mathcal{M}$ で **真** であるといい, $\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{F}$ となるとき, A は $\mathcal{M}$ で **偽** であるという.

1/52

以下では, 恒真性についての議論の例を見ていく.

例 18.6. シグニチャ $L = \langle \emptyset, \{P^2\} \rangle$ を考える. L 上の述語論理式 $\forall x \forall y P(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x, y)$ は恒真.

(証明) 任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と, L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について, $\llbracket \forall x \forall y P(x, y) \rrbracket_v = \llbracket \forall y \forall x P(x, y) \rrbracket_v$ となることを示せばよい.

$\mathcal{M}$ を L -構造, v を $\mathcal{M}$ への付値とする.

このとき, 解釈の定義より,

$$\begin{aligned} \llbracket \forall x \forall y P(x, y) \rrbracket_v &= \text{T} \\ \Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket \forall y P(x, y) \rrbracket_{v[a/x]} &= \text{T} \\ \Leftrightarrow \text{任意の } a, b \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[a/x][b/y]} &= \text{T}. \end{aligned}$$

また,

5/52

恒真な述語論理式

命題論理式のトートロジーに対応する概念が述語論理式の恒真性となる.

定義 18.2. A をシグニチャ L 上の述語論理式とする. 任意の L -構造 $\mathcal{M}$ において, $\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{T}$ となるとき, A を **恒真** であるといい, $\models A$ と記す.

述語論理式 A の恒真性を (定義にもとづいて) 示すには, すべての L -構造 $\mathcal{M}$ において $\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{T}$ となることを示す必要がある.

2/52

$$\llbracket \forall y \forall x P(x, y) \rrbracket_v = \text{T}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{任意の } b \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket \forall x P(x, y) \rrbracket_{v[b/y]} &= \text{T} \\ \Leftrightarrow \text{任意の } a, b \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[a/x][b/y]} &= \text{T}. \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} v[a/x][b/y](x) &= v[a/x](x) = a \\ v[a/x][b/y](y) &= b \\ v[a/x][b/y](z) &= v[a/x](z) = v(z) \end{aligned} \quad (\text{任意の変数 } z \notin \{x, y\} \text{ について})$$

および

$$\begin{aligned} v[b/y][a/x](x) &= a \\ v[b/y][a/x](y) &= v[b/y](y) = b \\ v[b/y][a/x](z) &= v[b/y](z) = v(z) \end{aligned} \quad (\text{任意の変数 } z \notin \{x, y\} \text{ について})$$

6/52

したがって、 $v[a/x][b/y] = v[b/y][a/x]$ が成立する。

よって、

$$\llbracket \forall x \forall y P(x, y) \rrbracket_v = T$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a, b \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = T$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a, b \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[b/y][a/x]} = T$$

$$\Leftrightarrow \llbracket \forall y \forall x P(x, y) \rrbracket_v = T.$$

□

例 18.7. シグニチャ $L = \langle \mathcal{F}, \{P^1\} \rangle$ を考える. 任意の L 上の項 t について、 $\forall x P(x) \rightarrow P(t)$ は恒真.

(証明) t を L 上の任意の項とする. 任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と、 L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について、 $\llbracket \forall x P(x) \rightarrow P(t) \rrbracket_v = T$ となること、つまり、 $\llbracket \forall x P(x) \rrbracket_v = T$ ならば $\llbracket P(t) \rrbracket_v = T$ となることを示せばよい.

7/52

$\mathcal{M}$ を L -構造、 v を $\mathcal{M}$ への付値とし、 $\llbracket \forall x P(x) \rrbracket_v = T$ を仮定する.

このとき、解釈の定義より、任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について、 $\llbracket P(x) \rrbracket_{v[a/x]} = T$. よって、 $\llbracket x \rrbracket_{v[a/x]} = a$ であるから、任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について、 $a \in P^{\mathcal{M}}$ が成立する. したがって、 $\llbracket t \rrbracket_v \in |\mathcal{M}|$ であるから、 $\llbracket t \rrbracket_v \in P^{\mathcal{M}}$ となる. よって、解釈の定義より、 $\llbracket P(t) \rrbracket_v = T$. 以上より、 $\llbracket \forall x P(x) \rightarrow P(t) \rrbracket_v = T$.

□

演習 18.8. シグニチャ $L = \langle \mathcal{F}, \{P^1\} \rangle$ を考える. このとき、任意の L 上の項 t について、 L 上の述語論理式 $P(t) \rightarrow \exists x P(x)$ は恒真となることを示せ.

8/52

演習 18.8. シグニチャ $L = \langle \mathcal{F}, \{P^1\} \rangle$ を考える. このとき、任意の L 上の項 t について、 L 上の述語論理式 $P(t) \rightarrow \exists x P(x)$ は恒真となることを示せ.

(解答) t を L 上の項とする. 任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と、 L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について、 $\llbracket P(t) \rightarrow \exists x P(x) \rrbracket_v = T$ となること、つまり、 $\llbracket P(t) \rrbracket_v = T$ ならば $\llbracket \exists x P(x) \rrbracket_v = T$ となることを示せばよい.

$\mathcal{M}$ を L -構造、 v を $\mathcal{M}$ への付値とし、 $\llbracket P(t) \rrbracket_v = T$ を仮定する. このとき、解釈の定義より、 $\llbracket t \rrbracket_v \in P^{\mathcal{M}}$.

よって、 $\llbracket t \rrbracket_v = a$ とおくと、 $\llbracket P(x) \rrbracket_{v[a/x]} = T$.

よって、解釈の定義より、 $\llbracket \exists x P(x) \rrbracket_v = T$.

以上より、 $\llbracket P(t) \rightarrow \exists x P(x) \rrbracket_v = T$.

□

9/52

次に、恒真性についての議論の例として、恒真でないことを示す(反証する)例を見ていく.

例 18.9. シグニチャ $L = \langle \emptyset, \{P^2\} \rangle$ を考える. L 上の述語論理式 $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$ について、その反例を与えよ.

(解答例) L -構造として、 $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ をとり、これが反例となることを示す. v を任意の付値とする.

任意の $n \in \mathbb{Z}$ について、 $n \leq m$ なる $m \in \mathbb{Z}$ として、 $m = n$ をとればよいから、 $\llbracket \forall x \exists y P(x, y) \rrbracket_v = T$.

一方、 $\mathbb{Z}$ 上に最小の要素はないので、 $\llbracket \exists x \forall y P(x, y) \rrbracket_v = F$.

よって、 $\llbracket \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rrbracket_v = F$.

すなわち、 $\llbracket \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rrbracket_{\mathcal{Z}} = F$ となるので、 $\mathcal{Z}$ は与えられた述語論理式の反例.

□

10/52

例 18.10. シグニチャ $L = \langle \emptyset, \{P^1, Q^1\} \rangle$ を考える. このとき、述語論理式 $(\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ の反例を与えよ.

(解答例) L -構造 $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, P^{\mathcal{M}}, Q^{\mathcal{M}} \rangle$, $P^{\mathcal{M}} = \{0\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{1\}$ を考える. v を任意の付値とする.

このとき、 $\llbracket \forall x P(x) \rrbracket_v = F$ より、 $\llbracket \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \rrbracket_v = T$. 一方、 $\llbracket P(x) \rightarrow Q(x) \rrbracket_{v[0/x]} = F$ であるから、 $\llbracket \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rrbracket_v = F$. 従って、 $\llbracket (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rrbracket_v = F$.

よって、 $\llbracket (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rrbracket_{\mathcal{M}} = F$. つまり、 $\mathcal{M}$ は与えられた述語論理式の反例となる.

11/52

演習 18.11.

(1) シグニチャ $L = \langle \emptyset, \{P^2\} \rangle$ を考えるとき、 $\forall x \exists y P(x, y)$ の反例を与えよ.

(2) シグニチャ $L = \langle \emptyset, \{Q^1\} \rangle$ を考えるとき、 $\forall x \forall y (Q(x) \rightarrow Q(y))$ の反例を与えよ.

(解答例)

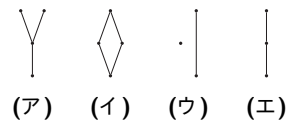
(1) L -構造として、 $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{M}} \rangle$, $P^{\mathcal{M}} = \{ \rangle$ をとる. v を任意の付値とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ について、 $0 > n$ は成立しないから、 $\llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[0/x][n/y]} = F$. よって、 $\llbracket \exists y P(x, y) \rrbracket_{v[0/x]} = F$. 従って、 $\llbracket \forall x \exists y P(x, y) \rrbracket_v = F$. 以上より、 $\llbracket \forall x \exists y P(x, y) \rrbracket_{\mathcal{M}} = F$ となるから、 $\mathcal{M}$ は反例となる.

(2) L -構造として、 $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, Q^{\mathcal{M}} \rangle$, $Q^{\mathcal{M}} = \{0\}$ をとる. v を任意の付値とすると、 $\llbracket Q(x) \rrbracket_{v[0/x][1/y]} = T$, $\llbracket Q(y) \rrbracket_{v[0/x][1/y]} = F$ より、 $\llbracket Q(x) \rightarrow Q(y) \rrbracket_{v[0/x][1/y]} = F$ となる. よって、 $\llbracket \forall y (Q(x) \rightarrow Q(y)) \rrbracket_{v[0/x]} = F$. 従って、 $\llbracket \forall x \forall y (Q(x) \rightarrow Q(y)) \rrbracket_v = F$. 以上より、 $\llbracket \forall x \forall y (Q(x) \rightarrow Q(y)) \rrbracket_{\mathcal{M}} = F$ となるから、 $\mathcal{M}$ は反例となる.

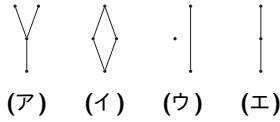
13/52

演習 18.12. 下記のハッセ図(ア)~(エ)で表わされる半順序の L -構造について、以下の述語論理式のモデルとなっているのはどれか.

- (1) $\neg \exists y \forall x (x \leq y)$
- (2) $\exists x \exists y \exists z (x < y \wedge y < z)$
- (3) $\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$



14/52



(解答)

- (1) $\neg \exists y \forall x (x \leq y)$ (ア), (ウ)
 (2) $\exists x \exists y \exists z (x < y \wedge y < z)$ (ア), (イ), (エ)
 (3) $\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$ (エ)

15/52

述語論理式の論理的同値性

次に、述語論理式における、論理的同値性について紹介する。

定義 18.14. A, B をシグニチャ L 上の述語論理式とする。任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}$ 上の任意の付値 v について、 $\llbracket A \rrbracket_v = \llbracket B \rrbracket_v$ となるとき、述語論理式 A と B は**論理的同値**であるといい、 $A \cong B$ と記す。

述語論理の講義の最初の数回では、きちんとした意味論を与えずに、重要な述語論理式の真偽を議論した。

以下では、そこで説明した合同性や同値式の証明を、これまで説明してきた意味論に基づいて与える。

18/52

演習 18.13. シグニチャを $L = \langle \emptyset, \{P^2\} \rangle$ とするとき、 L -構造 $\mathcal{M}_i = \langle |\mathcal{M}_i|, P^{\mathcal{M}_i} \rangle$ ($1 \leq i \leq 3$) を以下のように定める。

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= \langle \mathbb{N}, \{ \langle x, y \rangle \mid x < y \} \rangle \\ \mathcal{M}_2 &= \langle \mathbb{N}, \{ \langle x, y \rangle \mid x \leq y \} \rangle \\ \mathcal{M}_3 &= \langle \mathbb{N}, \{ \langle x, y \rangle \mid x + y = 10 \} \rangle\end{aligned}$$

以下の(1)~(4)の述語論理式それぞれについて、 $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_2$ のうちでそのモデルとなっている L -構造をすべて挙げよ。

- (1) $\exists x \exists y P(x, y)$
 (2) $\exists x \forall y P(x, y)$
 (3) $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(y, x)$
 (4) $\forall x (\exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, x))$

16/52

論理的同値性の合同性

定理 18.15. [再掲] 論理的同値性は述語論理式上の合同関係である。つまり、 $A \cong B$ ならば、 $\neg A \cong \neg B$, $Qx A \cong Qx B$ ($Q \in \{\forall, \exists\}$) が成立し、 $A \cong B$ かつ $C \cong D$ ならば、 $A \circ C \cong B \circ D$ ($\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$) が成立する。

(証明) ここでは、全称についての場合の証明のみを示す。残りは省略。 $A \cong B$ と仮定する。このとき、任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}$ 上の任意の付値 v について、 $\llbracket A \rrbracket_v = \llbracket B \rrbracket_v$ 。このとき、 $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について、} \llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について、} \llbracket B \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \llbracket \forall x B \rrbracket_v = \text{T}.$$

$$\text{したがって、} \llbracket \forall x A \rrbracket_v = \llbracket \forall x B \rrbracket_v.$$

□
19/52

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= \langle \mathbb{N}, \{ \langle x, y \rangle \mid x < y \} \rangle \\ \mathcal{M}_2 &= \langle \mathbb{N}, \{ \langle x, y \rangle \mid x \leq y \} \rangle \\ \mathcal{M}_3 &= \langle \mathbb{N}, \{ \langle x, y \rangle \mid x + y = 10 \} \rangle\end{aligned}$$

(解答)

- (1) $\exists x \exists y P(x, y)$ $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$
 (2) $\exists x \forall y P(x, y)$ $\mathcal{M}_2$
 (3) $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(y, x)$ $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_3$
 (4) $\forall x (\exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, x))$ $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$

17/52

重要な同値式 (1) [再掲]

$$\text{全称の交換} \quad \forall x \forall y A \cong \forall y \forall x A$$

$$\text{存在の交換} \quad \exists x \exists y A \cong \exists y \exists x A$$

(証明) ここでは最初の同値式の証明だけ示す。残りは省略。 A をシグニチャ L 上の述語論理式とする。

任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と、 L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について、 $\llbracket \forall x \forall y A \rrbracket_v = \llbracket \forall y \forall x A \rrbracket_v$ となることを示せばよい。

$x = y$ の場合。 $\forall x \forall x A \cong \forall x \forall x A$ となり、これは $\cong$ の反射性より成立する。

$x \neq y$ の場合。 $\mathcal{M}$ を L -構造、 v を $\mathcal{M}$ への付値とする。

このとき、解釈の定義より、

$$\llbracket \forall x \forall y A \rrbracket_v = \text{T}$$

20/52

目次

- 述語論理式の恒真性
- 述語論理式の論理的同値性
- 代入の性質

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について、} \llbracket \forall y A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a, b \in |\mathcal{M}| \text{ について、} \llbracket A \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = \text{T}.$$

また、

$$\llbracket \forall y \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } b \in |\mathcal{M}| \text{ について、} \llbracket \forall x A \rrbracket_{v[b/y]} = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a, b \in |\mathcal{M}| \text{ について、} \llbracket A \rrbracket_{v[b/y][a/x]} = \text{T}.$$

このとき、 $x \neq y$ より、 $v[a/x][b/y] = v[b/y][a/x]$.

よって、

$$\llbracket \forall x \forall y A \rrbracket_v = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a, b \in |\mathcal{M}| \text{ について、} \llbracket A \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a, b \in |\mathcal{M}| \text{ について、} \llbracket A \rrbracket_{v[b/y][a/x]} = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \llbracket \forall y \forall x A \rrbracket_v = \text{T}.$$

□

21/52

重要な同値式 (2) [再掲]

全称の分配 $\forall x (A \wedge B) \cong \forall x A \wedge \forall x B$

存在の分配 $\exists x (A \vee B) \cong \exists x A \vee \exists x B$

(証明) ここでは最初の同値式の証明だけ示す。残りは省略。

A をシグニチャ L 上の述語論理式とする。このとき、任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と、 L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について、 $\llbracket \forall x (A \wedge B) \rrbracket_v = \llbracket \forall x A \wedge \forall x B \rrbracket_v$ となることを示せばよい。これには、 $\mathcal{M}$ を L -構造、 v を $\mathcal{M}$ への付値としたとき、 $\llbracket \forall x (A \wedge B) \rrbracket_v = \text{T} \Leftrightarrow \llbracket \forall x A \wedge \forall x B \rrbracket_v = \text{T}$ を示せばよい。

($\Rightarrow$) $\llbracket \forall x (A \wedge B) \rrbracket_v = \text{T}$ と仮定する。このとき、解釈の定義より、任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について、 $\llbracket A \wedge B \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ 。従って、 $a \in |\mathcal{M}|$ としたとき、 $\llbracket A \wedge B \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ 。このとき、
22/52

積の定義より、 $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ かつ $\llbracket B \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ 。よって、 $a \in |\mathcal{M}|$ の取り方は任意だったから、 $\llbracket \forall x A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ が成立する。同様に、 $\llbracket \forall x B \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ も成立する。よって、 $\llbracket \forall x A \wedge \forall x B \rrbracket_v = \text{T}$ が成立する。

($\Leftarrow$) $\llbracket \forall x A \wedge \forall x B \rrbracket_v = \text{T}$ と仮定する。このとき、解釈の定義より、 $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ および同様に、 $\llbracket \forall x B \rrbracket_v = \text{T}$ 。よって、解釈の定義より、任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について、 $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ が成立する。同様に、任意の $b \in |\mathcal{M}|$ について、 $\llbracket B \rrbracket_{v[b/x]} = \text{T}$ が成立する。よって、任意の $c \in |\mathcal{M}|$ をとるとき、 $\llbracket A \rrbracket_{v[c/x]} = \text{T}$ も $\llbracket B \rrbracket_{v[c/x]} = \text{T}$ も成立する。よって、任意の $c \in |\mathcal{M}|$ について、 $\llbracket A \wedge B \rrbracket_{v[c/x]} = \text{T}$ 。すなわち、 $\llbracket \forall x (A \wedge B) \rrbracket_v = \text{T}$ 。
□

23/52

重要な同値式 (3) [再掲]

ド・モルガンの法則

$$\neg \forall x A \cong \exists x \neg A$$

$$\neg \exists x A \cong \forall x \neg A$$

(証明) ここでは最初の同値式の証明だけ示す。残りは省略。

A をシグニチャ L 上の述語論理式とする。このとき、任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と、 L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について、 $\llbracket \neg \forall x A \rrbracket_v = \llbracket \exists x \neg A \rrbracket_v$ となることを示せばよい。これには、 v を $\mathcal{M}$ への付値としたとき、 $\llbracket \neg \forall x A \rrbracket_v = \text{T} \Leftrightarrow \llbracket \exists x \neg A \rrbracket_v = \text{T}$ を示せばよい。

($\Rightarrow$) $\llbracket \neg \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ と仮定する。このとき、解釈の定義より、 $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{F}$ 。よって、任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について
24/52

$\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ となることはない。つまり、 $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{F}$ となる $a \in |\mathcal{M}|$ が存在する。このとき、 $\llbracket \neg A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ 。よって、ある $a \in |\mathcal{M}|$ が存在して、 $\llbracket \neg A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ となる。したがって、 $\llbracket \exists x \neg A \rrbracket_v = \text{T}$ が成立する。

($\Leftarrow$) $\llbracket \exists x \neg A \rrbracket_v = \text{T}$ と仮定する。このとき、解釈の定義より、ある $a \in |\mathcal{M}|$ が存在して、 $\llbracket \neg A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ となる。つまり、 $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{F}$ となる $a \in |\mathcal{M}|$ が存在する。したがって、すべての $a \in |\mathcal{M}|$ について $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ 、ということは成立しない。つまり、 $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{F}$ 。よって、 $\llbracket \neg \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ 。
□

25/52

自由変数と解釈の等価性

重要な同値式 (4) の証明の準備として、以下の補題を示す。

補題 18.16. $\mathcal{M}$ を L -構造、 v, v' を $\mathcal{M}$ 上の付値とする。

- (1) 任意の変数 $x \in V(t)$ について $v(x) = v'(x)$ が成立するとき、 $\llbracket t \rrbracket_v = \llbracket t \rrbracket_{v'}$ 。
- (2) 任意の自由変数 $x \in \text{FV}(A)$ について $v(x) = v'(x)$ が成立するとき、 $\llbracket A \rrbracket_v = \llbracket A \rrbracket_{v'}$ 。

(証明)

(1) t に関する帰納法で、任意の $x \in V(t)$ について $v(x) = v'(x)$ ならば、 $\llbracket t \rrbracket_v = \llbracket t \rrbracket_{v'}$ となることを示す。

26/52

$t = x \in V$ の場合。

このとき、 $V(t) = \{x\}$ であるから、仮定より、 $\llbracket t \rrbracket_v = v(x) = v'(x) = \llbracket t \rrbracket_{v'}$ 。

$t = f(t_1, \dots, t_n)$ の場合。

このとき、定義から $V(t) = \bigcup_{i=1}^n V(t_i)$ 。

よって、 $1 \leq i \leq n$ とするとき、 $V(t_i) \subseteq V(t)$ 。従って、仮定より、任意の $x \in V(t_i)$ について $v(x) = v'(x)$ 。よって、帰納法の仮定から、 $\llbracket t_i \rrbracket_v = \llbracket t_i \rrbracket_{v'}$ が成立する。

以上より、

$$\begin{aligned} \llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v &= f^{\mathcal{M}}(\llbracket t_1 \rrbracket_v, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v) \\ &= f^{\mathcal{M}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{v'}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{v'}) \\ &= \llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v'} \end{aligned}$$

27/52

(2) 述語論理式 A に関する帰納法で、任意の $x \in \text{FV}(A)$ について $v(x) = v'(x)$ ならば $\llbracket A \rrbracket_v = \llbracket A \rrbracket_{v'}$ となることを示す。

$A = P(t_1, \dots, t_n)$ の場合。

このとき、定義から $\text{FV}(A) = \bigcup_{i=1}^n V(t_i)$ 。

よって、仮定より、任意の $x \in V(t_i)$ について、 $v(x) = v'(x)$ 。従って、(1) から、 $\llbracket t_i \rrbracket_v = \llbracket t_i \rrbracket_{v'}$ 。

よって、

$$\begin{aligned} \llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v &= \text{T} \\ \Leftrightarrow \langle \llbracket t_1 \rrbracket_v, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v \rangle &\in P^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow \langle \llbracket t_1 \rrbracket_{v'}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{v'} \rangle &\in P^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow \llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v'} &= \text{T} \end{aligned}$$

よって、解釈の取り得る値は T, F であるから、

$$\llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v = \llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v'}.$$

$A = s \approx t$ の場合。省略

28/52

$A \in \{\perp, \top\}$, $A = \neg B$ の場合。省略

$A = B \wedge C$ の場合。

このとき、定義から、 $\text{FV}(A) = \text{FV}(B) \cup \text{FV}(C)$ 。

よって、仮定より、任意の $x \in \text{FV}(B)$ について $v(x) = v'(x)$ 、また、任意の $x \in \text{FV}(C)$ について $v(x) = v'(x)$ 。

よって、帰納法の仮定より、 $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket B \rrbracket_{v'}$ かつ $\llbracket C \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_{v'}$ 。

よって、

$$\begin{aligned} \llbracket B \wedge C \rrbracket_v = \text{T} &\Leftrightarrow \llbracket B \rrbracket_v = \text{T} \text{ かつ } \llbracket C \rrbracket_v = \text{T} \\ &\Leftrightarrow \llbracket B \rrbracket_{v'} = \text{T} \text{ かつ } \llbracket C \rrbracket_{v'} = \text{T} \\ &\Leftrightarrow \llbracket B \wedge C \rrbracket_{v'} = \text{T} \end{aligned}$$

よって、解釈の取り得る値は T, F であるから、

$$\llbracket B \wedge C \rrbracket_v = \llbracket B \wedge C \rrbracket_{v'}.$$

29/52

$A = B \vee C, A = B \rightarrow C$ の場合. 省略.

$A = \forall y B$ の場合.

このとき、定義から $\text{FV}(A) = \text{FV}(B) \setminus \{y\}$.

よって、仮定より、任意の $x \in \text{FV}(B)$ と任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について、 $v[a/y] = v'[a/y]$ が成立する. よって、帰納法の仮定より、 $\llbracket B \rrbracket_{v[a/y]} = \llbracket B \rrbracket_{v'[a/y]}$. 従って、

$$\begin{aligned} \llbracket \forall y B \rrbracket_v &= \text{T} \\ \Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket B \rrbracket_{v[a/y]} &= \text{T} \\ \Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket B \rrbracket_{v'[a/y]} &= \text{T} \\ \Leftrightarrow \llbracket \forall y B \rrbracket_{v'} &= \text{T} \end{aligned}$$

よって、解釈の取り得る値は T, F であるから、 $\llbracket \forall x B \rrbracket_v = \llbracket \forall x B \rrbracket_{v'}$.

$A = \exists y B$ の場合. 省略.

□
30/52

重要な同値式 (4) [再掲]

自由変数集合を利用した次の同値式が成立する.

束縛の導入・消去 ($x \notin \text{FV}(C)$ とする)

$$\forall x C \cong C, \quad \exists x C \cong C$$

束縛の移動 ($x \notin \text{FV}(C)$ とする)

$$\begin{aligned} \forall x (A \vee C) &\cong \forall x A \vee C, \quad \forall x (C \vee A) \cong C \vee \forall x A, \\ \forall x (A \wedge C) &\cong \forall x A \wedge C, \quad \forall x (C \wedge A) \cong C \wedge \forall x A, \\ \exists x (A \wedge C) &\cong \exists x A \wedge C, \quad \exists x (C \wedge A) \cong C \wedge \exists x A, \\ \exists x (A \vee C) &\cong \exists x A \vee C, \quad \exists x (C \vee A) \cong C \vee \exists x A \end{aligned}$$

(証明) ここでは最初の同値式の証明だけ示す. 残りは省略.

A, C をシグニチャ L 上の述語論理式とし、 $x \notin \text{FV}(C)$ とす

31/52

る. 任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と、 L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について、 $\llbracket \forall x C \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v$ となることを示せばよい.

条件 $x \notin \text{FV}(C)$ から、補題 18.16(2) より、 $\llbracket C \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket C \rrbracket_v$ が成立することに注意すると、

$$\begin{aligned} \llbracket \forall x C \rrbracket_v = \text{T} &\Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket C \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T} \\ &\Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket C \rrbracket_v = \text{T} \\ &\Leftrightarrow \llbracket C \rrbracket_v = \text{T} \end{aligned}$$

よって、 $\llbracket \forall x C \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v$.

□

32/52

束縛変数の名前替えの正しさ

重要な同値式 (5) の証明の準備として、以下の補題を示す.

補題 18.17. 項 t における変数 x の出現すべてを変数 $y \notin V(t)$ に置き替えて得られる項を t' とおき、述語論理式 A における変数 x の自由出現すべてを変数 $y \notin \text{FV}(A)$ に置き替えて得られる述語論理式を A' とおく. また、 $\mathcal{M}$ を L -構造、 v を $\mathcal{M}$ 上の付値とする.

- (1) 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について、 $\llbracket t \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket t' \rrbracket_{v[a/y]}$.
- (2) 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について、 $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket A' \rrbracket_{v[a/y]}$.
- (3) $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \llbracket \forall y A' \rrbracket_v$, $\llbracket \exists x A \rrbracket_v = \llbracket \exists y A' \rrbracket_v$.

(証明) (1) t に関する帰納法で、 $\llbracket t \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket t' \rrbracket_{v[a/y]}$ となることを示す.

33/52

t が変数の場合.

$t = x$ の場合は、 $\llbracket t \rrbracket_{v[a/x]} = a = \llbracket t' \rrbracket_{v[a/y]}$ より明らか. $t = y$ の場合は、 $y \in V(y)$ となるから仮定に矛盾. $t = z \notin \{x, y\}$ の場合は、 $\llbracket t \rrbracket_{v[a/x]} = v(z) = \llbracket t' \rrbracket_{v[a/y]}$ より明らか.

$t = f(t_1, \dots, t_n)$ の場合.

このとき、項 t_i における変数 x の出現すべてを変数 y に置き替えて得られる項を t'_i とすると、 $t = f(t'_1, \dots, t'_n)$ とおき、帰納法の仮定より $\llbracket t_i \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket t'_i \rrbracket_{v[a/y]}$ が成立する. よって、

$$\begin{aligned} \llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v[a/x]} &= f^{\mathcal{M}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{v[a/x]}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{v[a/x]}) \\ &= f^{\mathcal{M}}(\llbracket t'_1 \rrbracket_{v[a/y]}, \dots, \llbracket t'_n \rrbracket_{v[a/y]}) \\ &= \llbracket f(t'_1, \dots, t'_n) \rrbracket_{v[a/y]} \end{aligned}$$

(2) 述語論理式 A に関する帰納法で、任意の付値 v について、 $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket A' \rrbracket_{v[a/y]}$ となることを示す.

$A = P(t_1, \dots, t_n)$ の場合.

このとき、項 t_i における変数 x の出現すべてを変数 y に置き替えて得られる項を t'_i とすると、 $A' = P(t'_1, \dots, t'_n)$ とおき、(1) から、 $\llbracket t_i \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket t'_i \rrbracket_{v[a/y]}$. よって、

$$\begin{aligned} \llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v[a/x]} &= \text{T} \\ \Leftrightarrow \langle \llbracket t_1 \rrbracket_{v[a/x]}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{v[a/x]} \rangle &\in P^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow \langle \llbracket t'_1 \rrbracket_{v[a/y]}, \dots, \llbracket t'_n \rrbracket_{v[a/y]} \rangle &\in P^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow \llbracket P(t'_1, \dots, t'_n) \rrbracket_{v[a/y]} &= \text{T} \end{aligned}$$

よって、解釈の取り得る値は T, F であるから、

$$\llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v = \llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v'}.$$

$A = s \approx t$ の場合. 省略

35/52

$A \in \{\perp, \top\}, A = \neg B$ の場合. 省略

$A = B \wedge C$ の場合.

このとき、 B および C における変数 x の自由出現すべてを変数 y に置き替えて得られる項をそれぞれ B', C' とすると、 $A' = B' \wedge C'$ とおける. よって、帰納法の仮定より、 $\llbracket B \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket B' \rrbracket_{v[a/y]}$ かつ $\llbracket C \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket C' \rrbracket_{v[a/y]}$. よって、

$$\begin{aligned} \llbracket B \wedge C \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T} &\Leftrightarrow \llbracket B \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T} \text{ かつ } \llbracket C \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T} \\ &\Leftrightarrow \llbracket B' \rrbracket_{v[a/y]} = \text{T} \text{ かつ } \llbracket C' \rrbracket_{v[a/y]} = \text{T} \\ &\Leftrightarrow \llbracket B' \wedge C' \rrbracket_{v[a/y]} = \text{T} \end{aligned}$$

よって、解釈の取り得る値は T, F であるから、

$$\llbracket B \wedge C \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket B' \wedge C' \rrbracket_{v[a/y]}.$$

$A = B \vee C, A = B \rightarrow C$ の場合. 省略.

36/52

$A = \forall z B$ の場合.

$x = z$ のときは、 $A' = A$ となり自明. $y = z$ のときは、 $y \in \text{FV}(A)$ に矛盾. $z \notin \{x, y\}$ のとき. このとき、 B における変数 x の自由出現すべてを変数 y に置き替えて得られる項をそれぞれ B' とすると、 $A' = \forall z B'$ とおける. よって、帰納法の仮定より、任意の $b \in |\mathcal{M}|$ について、 $\llbracket B \rrbracket_{v[b/z][a/x]} = \llbracket B' \rrbracket_{v[b/z][a/y]}$ が成立する. 従って、 $\llbracket B \rrbracket_{v[a/x][b/z]} = \llbracket B' \rrbracket_{v[a/y][b/z]}$ が成立. 以上より、

$$\begin{aligned} \llbracket \forall z B \rrbracket_{v[a/x]} &= \text{T} \\ \Leftrightarrow \text{任意の } b \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket B \rrbracket_{v[a/x][b/z]} &= \text{T} \\ \Leftrightarrow \text{任意の } b \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket B' \rrbracket_{v[a/y][b/z]} &= \text{T} \\ \Leftrightarrow \llbracket \forall z B' \rrbracket_{v[a/y]} &= \text{T} \end{aligned}$$

よって、 $\llbracket \forall x B \rrbracket_v = \llbracket \forall x B \rrbracket_{v'}$.

$A = \exists y B$ の場合. 省略.

□

37/52

(3) (2)より, 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket A' \rrbracket_{v[a/y]}$. よって,

$$\begin{aligned} \llbracket \forall x A \rrbracket_v &= T \\ \Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} &= T \\ \Leftrightarrow \text{任意の } b \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket A' \rrbracket_{v[a/y]} &= T \\ \Leftrightarrow \llbracket \forall y A' \rrbracket_v &= T \\ \llbracket \exists x A \rrbracket_v &= T \\ \Leftrightarrow \text{ある } a \in |\mathcal{M}| \text{ が存在して, } \llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} &= T \\ \Leftrightarrow \text{ある } a \in |\mathcal{M}| \text{ が存在して, } \llbracket A' \rrbracket_{v[a/y]} &= T \\ \Leftrightarrow \llbracket \exists y A' \rrbracket_v &= T \end{aligned}$$

よって, $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \llbracket \forall y A' \rrbracket_v$ および $\llbracket \exists x A \rrbracket_v = \llbracket \exists y A' \rrbracket_v$ が成立する. $\square$

38/52

重要な同値式 (5) [再掲]

束縛変数の名前替え

(A' は A から束縛変数の名前替えで得られるとする)

$$A \cong A'$$

(証明) A' を A から束縛変数の名前替えで得られる述語論理式とすると, A' は, A から補題18.17の操作を何回か繰り返して得られる. よって, 補題18.17(3)と $\cong$ の合同関係性から, $A \cong A'$. $\square$

39/52

目次

- 述語論理式の恒真性
- 述語論理式の論理的同値性
- 代入の性質

39/52

代入の性質

束縛変数の名前替えの正しさが証明されたので, 以下では, 束縛変数の名前替えの便宜法の使用を仮定する.

補題 18.18. s をシグニチャ L 上の項, x を変数, v を L -構造 $\mathcal{M}$ への付値とする.

- (1) 任意の項 t について, $\llbracket [x := s]t \rrbracket_v = \llbracket t \rrbracket_{v[[s]v/x]}$.
- (2) 任意の述語論理式 A について, $\llbracket [x := s]A \rrbracket_v = \llbracket A \rrbracket_{v[[s]v/x]}$.

(証明) (1) t に関する帰納法で, $\llbracket [x := s]t \rrbracket_v = \llbracket t \rrbracket_{v[[s]v/x]}$ を示す.

t が変数の場合.

$t = x$ の場合.

40/52

$\llbracket [x := s]x \rrbracket_v = \llbracket s \rrbracket_v = v(x) = \llbracket x \rrbracket_{v[[s]v/x]}$ より成立.
 $t = y \neq x$ の場合.

$\llbracket [x := s]y \rrbracket_v = \llbracket y \rrbracket_v = v(y) = \llbracket y \rrbracket_{v[[s]v/x]}$ より成立.

$t = f(t_1, \dots, t_n)$ の場合.

このとき, 帰納法の仮定より, 任意の $1 \leq i \leq n$ について, $\llbracket [x := s]t_i \rrbracket_v = \llbracket t_i \rrbracket_{v[[s]v/x]}$ が成立する.

$$\begin{aligned} \text{従って, } \llbracket [x := s](f(t_1, \dots, t_n)) \rrbracket_v &= \llbracket f([x := s](t_1), \dots, [x := s](t_n)) \rrbracket_v \\ &= f^{\mathcal{M}}(\llbracket [x := s](t_1) \rrbracket_v, \dots, \llbracket [x := s](t_n) \rrbracket_v) \\ &= f^{\mathcal{M}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{v[[s]v/x]}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{v[[s]v/x]}) \\ &= \llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v[[s]v/x]} \end{aligned}$$

(2) 述語論理式 A に関する帰納法で, $\llbracket [x := s]A \rrbracket_v = \llbracket A \rrbracket_{v[[s]v/x]}$ となることを示す.

41/52

$A = P(t_1, \dots, t_n)$ の場合.

(1)より, $\llbracket [x := s]t_i \rrbracket_v = \llbracket t_i \rrbracket_{v[[s]v/x]}$.

よって,

$$\begin{aligned} \llbracket [x := s]A \rrbracket_v &= T \\ \Leftrightarrow \llbracket [x := s]P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v &= T \\ \Leftrightarrow \llbracket P([x := s]t_1, \dots, [x := s]t_n) \rrbracket_v &= T \\ \Leftrightarrow \langle \llbracket [x := s]t_1 \rrbracket_v, \dots, \llbracket [x := s]t_n \rrbracket_v \rangle &\in P^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow \langle \llbracket t_1 \rrbracket_{v[[s]v/x]}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{v[[s]v/x]} \rangle &\in P^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow \llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v[[s]v/x]} &= T \end{aligned}$$

よって, 解釈のとる値は T, F であるから,

$$\llbracket [x := s]t_i \rrbracket_v = \llbracket t_i \rrbracket_{v[[s]v/x]}.$$

$A = s \approx t$ の場合. 省略

$A \in \{\perp, \top\}$ の場合. 省略

$A = \neg B$ の場合.

42/52

帰納法の仮定より, $\llbracket [x := s]B \rrbracket_v = \llbracket B \rrbracket_{v[[s]v/x]}$.
よって,

$$\begin{aligned} \llbracket [x := s]\neg B \rrbracket_v &= T \Leftrightarrow \llbracket [x := s]B \rrbracket_v = F \\ \Leftrightarrow \llbracket B \rrbracket_{v[[s]v/x]} &= F \Leftrightarrow \llbracket \neg B \rrbracket_{v[[s]v/x]} = T. \end{aligned}$$

よって, 解釈のとる値は T, F であるから,

$$\llbracket [x := s]A \rrbracket_v = \llbracket A \rrbracket_{v[[s]v/x]}.$$

$A = B \wedge C, A = B \vee C, A = B \wedge C$ の場合. 省略.

$A = \forall y B$ の場合.

$x = y$ の場合.

このとき, 解釈の定義から, $\llbracket [x := s](\forall x B) \rrbracket_v = \llbracket \forall x B \rrbracket_v$.

ここで, $x \notin \text{FV}(\forall x B)$ であることから,

補題18.16(2)より, $\llbracket \forall x B \rrbracket_v = \llbracket \forall x B \rrbracket_{v[[s]v/x]}$.

よって, $\llbracket [x := s]\forall x B \rrbracket_v = \llbracket \forall x B \rrbracket_{v[[s]v/x]}$.

$x \neq y$ の場合.

43/52

このとき, $\llbracket [x := s]\forall y B \rrbracket_v = \llbracket \forall y [x := s]B \rrbracket_v$.
よって,

$$\begin{aligned} \llbracket [x := s]\forall y B \rrbracket_v &= T \\ \Leftrightarrow \llbracket \forall y [x := s]B \rrbracket_v &= T \\ \Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket [x := s]B \rrbracket_{v[a/y]} &= T \end{aligned}$$

ここで, $b = \llbracket s \rrbracket_{v[a/y]}$ とおくと,
帰納法の仮定より, $\llbracket [x := s]B \rrbracket_{v[a/y]} = \llbracket B \rrbracket_{v[a/y][b/x]}$.
また, $x \neq y$ より, $\llbracket B \rrbracket_{v[a/y][b/x]} = \llbracket B \rrbracket_{v[b/x][a/y]}$.
一方, 束縛変数の名前替えの便宜法より, $y \notin \text{V}(s)$.
よって, 補題18.16(2)より, $b = \llbracket s \rrbracket_{v[a/y]} = \llbracket s \rrbracket_v$.
以上より,

$$\begin{aligned} \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket [x := s]B \rrbracket_{v[a/y]} &= T \\ \Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket B \rrbracket_{v[a/y][b/x]} &= T \\ \Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket B \rrbracket_{v[b/x][a/y]} &= T \end{aligned}$$

44/52

$\Leftrightarrow$ 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket B \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_{v/x}][a/y]} = \text{T}$
 $\Leftrightarrow \llbracket \forall y B \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_{v/x}]} = \text{T}$
 よって, 解釈のとり値は T, F であることから,
 $\llbracket [x := s] \forall y B \rrbracket_v = \llbracket \forall y B \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_{v/x}]}$.
 $A = \exists y B$ の場合. 省略. □

45/52

恒真式の証明例 (1)

代入と全称 $\forall x A \rightarrow [x := t](A)$

代入と存在 $[x := t](A) \rightarrow \exists x A$

(証明) ここでは最初の論理式の証明だけ示す. 残りは省略.
 A をシグニチャ L 上の述語論理式とする. $\mathcal{M}$ を任意の L -構造, v を L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値とし, $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ と仮定する.
 解釈の定義から, 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$.
 従って, $\llbracket t \rrbracket_v \in |\mathcal{M}|$ であるから, $\llbracket A \rrbracket_{v[\llbracket t \rrbracket_v/x]} = \text{T}$.
 ここで, 補題 18.18(2) より, $\llbracket [x := t] A \rrbracket_v = \llbracket A \rrbracket_{v[\llbracket t \rrbracket_v/x]}$ であるから, $\llbracket [x := t] A \rrbracket_v = \text{T}$.

□
46/52

$\forall x A \rightarrow [x := t](A)$ の逆向きの含意, つまり, $[x := t](A) \rightarrow \forall x A$ は一般には成立しない.

演習 18.19. シグニチャを $\langle \{a^0\}, \{P^1\} \rangle$ とするとき, $P(a) \rightarrow \forall x P(x)$ の反例を与えよ.

同様に, $[x := t](A) \rightarrow \exists x A$ の逆向きの含意, つまり, $\exists x A \rightarrow [x := t](A)$ は一般には成立しない.

演習 18.20. シグニチャを $\langle \{a^0\}, \{P^1\} \rangle$ とするとき, $\exists x P(x) \rightarrow P(a)$ の反例を与えよ.

47/52

全称一般化

$\forall x A \rightarrow [x := t](A)$ の特殊形である $\forall x A \rightarrow A$ も, 一般には成立しない. しかし, 次の命題は成立する.

定理 18.21. 任意の述語論理式 A と任意の変数 x について, A が恒真であれば, $\forall x A$ も恒真.

(証明) A を恒真な述語論理式とする. すると, 定義より, 任意の L -構造 $\mathcal{M}$, L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について, $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$. 従って, 特に, 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$. よって, 定義から, $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$. よって, 任意の L -構造 $\mathcal{M}$ について, $\llbracket \forall x A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{T}$ となる. ゆえに, $\forall x A$ は恒真. □

48/52

恒真式の証明例 (2)

全称と存在 $\forall x A \rightarrow \exists x A$

全称と存在の交換 $\exists y \forall x A \rightarrow \forall x \exists y A$

(証明)

$\forall x A \rightarrow \exists x A$

A をシグニチャ L 上の述語論理式とする.
 任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と, L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について,
 $\llbracket \forall x A \rightarrow \exists x A \rrbracket_v = \text{T}$ となること, つまり, $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ ならば $\llbracket \exists x A \rrbracket_v = \text{T}$ となることを示せばよい.

$\mathcal{M}$ を L -構造, v を $\mathcal{M}$ への付値とし, $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ を仮定する.

このとき, 解釈の定義より, 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$.

$\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$.

ここで, L -構造の定義より, $|\mathcal{M}| \neq \emptyset$ であるから, $a \in |\mathcal{M}|$ なる a が少なくとも 1 つは存在する.

従って, ある $a \in |\mathcal{M}|$ が存在して, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$.

よって, 解釈の定義より, $\llbracket \exists x A \rrbracket_v = \text{T}$.

以上より, $\llbracket \forall x A \rightarrow \exists x A \rrbracket_v = \text{T}$.

$\exists y \forall x A \rightarrow \forall x \exists y A$

A をシグニチャ L 上の述語論理式とする.

任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と, L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について,
 $\llbracket \exists y \forall x A \rightarrow \forall x \exists y A \rrbracket_v = \text{T}$ となること, つまり,
 $\llbracket \exists y \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ ならば $\llbracket \forall x \exists y A \rrbracket_v = \text{T}$ となることを示せばよい.

(1) $x = y$ のとき.

$y \notin \text{FV}(\forall x A) = \text{FV}(\exists y A)$ と束縛の導入・消去規則(??ペー

50/52

ジ)より, $\llbracket \exists y \forall x A \rrbracket_v = \llbracket \forall x A \rrbracket_v$, $\llbracket \forall x \exists y A \rrbracket_v = \llbracket \exists y A \rrbracket_v$.
 よって, $\forall x A \rightarrow \exists x A$ の恒真性より成立する.

(2) $x \neq y$ のとき.

$\mathcal{M}$ を L -構造, v を $\mathcal{M}$ への付値とし, $\llbracket \exists y \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ を仮定する.

このとき, 解釈の定義より, ある $a \in |\mathcal{M}|$ が存在して,
 $\llbracket \forall x A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$. よって, 任意の $b \in |\mathcal{M}|$ について,
 $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = \text{T}$ となる.

このとき, $x \neq y$ より, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = \llbracket A \rrbracket_{v[b/y][a/x]}$ であるから, すべての $b \in |\mathcal{M}|$ とある $a \in |\mathcal{M}|$ について,
 $\llbracket A \rrbracket_{v[b/y][a/x]} = \text{T}$.
 よって, すべての $b \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket \exists x A \rrbracket_{v[b/y]} = \text{T}$.
 したがって, $\llbracket \forall y \exists x A \rrbracket_v = \text{T}$ となる.

51/52

まとめ

- 述語論理式の恒真性
 モデルと反例
 恒真性の証明の例
 恒真性の反証の例
- 述語論理式の論理的同値性
 論理的同値性の合同性の証明
 重要な同値式の証明
- 代入の性質

52/52