

2019年度 数理論理学

講義資料(18)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

- 述語論理式の恒真性
- 述語論理式の論理的同値性
- 代入の性質

述語論理式の解釈

命題論理式の真偽は命題変数への付値によって決まった．述語論理の場合は， L -構造を1つ与えると，述語論理式の真偽が決まる．

定義 18.1. A をシグニチャ L 上の述語論理式とする． L -構造 $\mathcal{M}$ における A の解釈 $\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}}$ を以下のように定義する：

$$\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \begin{cases} \text{T} & \text{(任意の付値 } v \text{ について, } \llbracket A \rrbracket_v = \text{T}) \\ \text{F} & \text{(それ以外するとき)} \end{cases}$$

$\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{T}$ となるとき， A は $\mathcal{M}$ で真であるといい， $\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{F}$ となるとき， A は $\mathcal{M}$ で偽であるという．

恒真な述語論理式

命題論理式のトートロジーに対応する概念が述語論理式の恒真性となる.

定義 18.2. A をシグニチャ L 上の述語論理式とする. 任意の L -構造 $\mathcal{M}$ において, $\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{T}$ となるとき, A を **恒真** であるといい, $\models A$ と記す.

述語論理式 A の恒真性を (定義にもとづいて) 示すには, すべての L -構造 $\mathcal{M}$ において $\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{T}$ となることを示す必要がある.

モデルと反例，充足可能性

定義 18.3. A をシグニチャ L 上の述語論理式とする． L -構造 $\mathcal{M}$ が $\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{T}$ を満たすとき， $\mathcal{M}$ を A の**モデル**とよぶ．

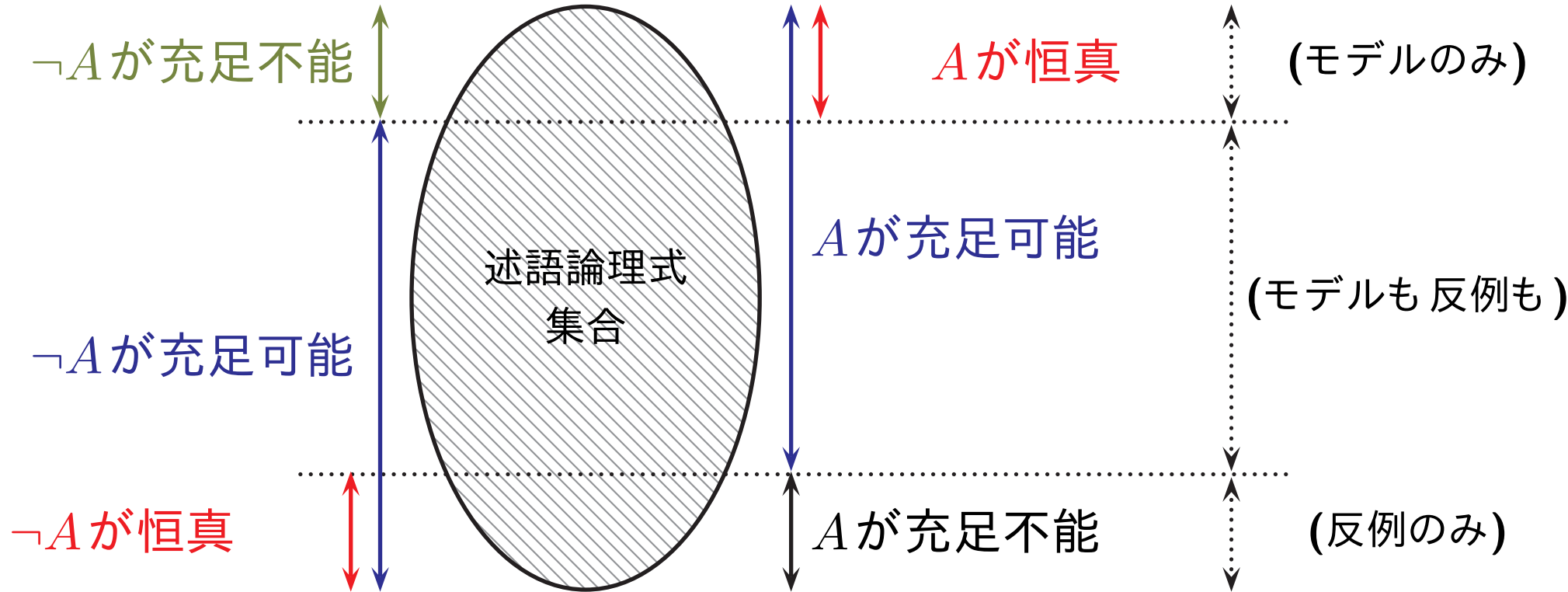
定義 18.4. A をシグニチャ L 上の述語論理式とする． L -構造 $\mathcal{M}$ が $\llbracket A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{F}$ を満たすとき， $\mathcal{M}$ を A の**反例**とよぶ．

定義から，**恒真でない述語論理式には反例があること**，
そして，**反例がある述語論理式は恒真でないことがわかる**．

定義 18.5. A をシグニチャ L 上の述語論理式とする． A のモデルが存在するとき， A は**充足可能**であるという．

定義から， **A が恒真であることと $\neg A$ が充足不能であることは同値となる**．

述語論理式の集合の全体像



以下では，恒真性についての議論の例を見ていく．

例 **18.6.** シグニチャ $L = \langle \emptyset, \{P^2\} \rangle$ を考える． L 上の述語論理式 $\forall x \forall y P(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x, y)$ は恒真．

(証明) 任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と， L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について， $\llbracket \forall x \forall y P(x, y) \rrbracket_v = \llbracket \forall y \forall x P(x, y) \rrbracket_v$ となることを示せばよい．

$\mathcal{M}$ を L -構造， v を $\mathcal{M}$ への付値とする．

このとき，解釈の定義より，

$$\llbracket \forall x \forall y P(x, y) \rrbracket_v = T$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について， } \llbracket \forall y P(x, y) \rrbracket_{v[a/x]} = T$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a, b \in |\mathcal{M}| \text{ について， } \llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = T.$$

また，

$$\llbracket \forall y \forall x P(x, y) \rrbracket_v = T$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } b \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket \forall x P(x, y) \rrbracket_{v[b/y]} = T$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a, b \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[b/y][a/x]} = T.$$

ここで,

$$v[a/x][b/y](x) = v[a/x](x) = a$$

$$v[a/x][b/y](y) = b$$

$$v[a/x][b/y](z) = v[a/x](z) = v(z)$$

(任意の変数 $z \notin \{x, y\}$ について)

および

$$v[b/y][a/x](x) = a$$

$$v[b/y][a/x](y) = v[b/y](y) = b$$

$$v[b/y][a/x](z) = v[b/y](z) = v(z)$$

(任意の変数 $z \notin \{x, y\}$ について)

したがって, $v[a/x][b/y] = v[b/y][a/x]$ が成立する.
よって,

$$\llbracket \forall x \forall y P(x, y) \rrbracket_v = T$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a, b \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = T$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a, b \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[b/y][a/x]} = T$$

$$\Leftrightarrow \llbracket \forall y \forall x P(x, y) \rrbracket_v = T.$$

□

例 18.7. シグニチャ $L = \langle \mathcal{F}, \{P^1\} \rangle$ を考える. 任意の L 上の項 t について, $\forall x P(x) \rightarrow P(t)$ は恒真.

(証明) t を L 上の任意の項とする. 任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と, L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について, $\llbracket \forall x P(x) \rightarrow P(t) \rrbracket_v = T$ となること, つまり, $\llbracket \forall x P(x) \rrbracket_v = T$ ならば $\llbracket P(t) \rrbracket_v = T$ となることを示せばよい.

$\mathcal{M}$ を L -構造, v を $\mathcal{M}$ への付値とし, $\llbracket \forall x P(x) \rrbracket_v = T$ を仮定する.

このとき, 解釈の定義より, 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket P(x) \rrbracket_{v[a/x]} = T$. よって, $\llbracket x \rrbracket_{v[a/x]} = a$ であるから, 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について, $a \in P^{\mathcal{M}}$ が成立する. したがって, $\llbracket t \rrbracket_v \in |\mathcal{M}|$ であるから, $\llbracket t \rrbracket_v \in P^{\mathcal{M}}$ となる. よって, 解釈の定義より, $\llbracket P(t) \rrbracket_v = T$. 以上より, $\llbracket \forall x P(x) \rightarrow P(t) \rrbracket_v = T$. □

演習 18.8. シグニチャ $L = \langle \mathcal{F}, \{P^1\} \rangle$ を考える. このとき, 任意の L 上の項 t について, L 上の述語論理式 $P(t) \rightarrow \exists x P(x)$ は恒真となることを示せ.

演習 18.8. シグニチャ $L = \langle \mathcal{F}, \{P^1\} \rangle$ を考える. このとき, 任意の L 上の項 t について, L 上の述語論理式 $P(t) \rightarrow \exists x P(x)$ は恒真となることを示せ.

(解答) t を L 上の項とする. 任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と, L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について, $\llbracket P(t) \rightarrow \exists x P(x) \rrbracket_v = T$ となること, つまり, $\llbracket P(t) \rrbracket_v = T$ ならば $\llbracket \exists x P(x) \rrbracket_v = T$ となることを示せばよい.

$\mathcal{M}$ を L -構造, v を $\mathcal{M}$ への付値とし, $\llbracket P(t) \rrbracket_v = T$ を仮定する. このとき, 解釈の定義より, $\llbracket t \rrbracket_v \in P^{\mathcal{M}}$.
よって, $\llbracket t \rrbracket_v = a$ とおくと, $\llbracket P(x) \rrbracket_{v[a/x]} = T$.
よって, 解釈の定義より, $\llbracket \exists x P(x) \rrbracket_v = T$.
以上より, $\llbracket P(t) \rightarrow \exists x P(x) \rrbracket_v = T$. □

次に、恒真性についての議論の例として、恒真でないことを示す(反証する)例を見ていく。

例 18.9. シグニチャ $L = \langle \emptyset, \{P^2\} \rangle$ を考える。 L 上の述語論理式 $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$ について、その反例を与えよ。

(解答例) L -構造として、 $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ をとり、これが反例となることを示す。 v を任意の付値とする。

任意の $n \in \mathbb{Z}$ について、 $n \leq m$ なる $m \in \mathbb{Z}$ として、 $m = n$ をとればよいから、 $\llbracket \forall x \exists y P(x, y) \rrbracket_v = \text{T}$ 。

一方、 $\mathbb{Z}$ 上に最小の要素はないので、 $\llbracket \exists x \forall y P(x, y) \rrbracket_v = \text{F}$ 。

よって、 $\llbracket \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rrbracket_v = \text{F}$ 。

すなわち、 $\llbracket \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rrbracket_{\mathcal{Z}} = \text{F}$ となるので、 $\mathcal{Z}$ は与えられた述語論理式の反例。 □

例 18.10. シグニチャ $L = \langle \emptyset, \{P^1, Q^1\} \rangle$ を考える. このとき, 述語論理式 $(\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ の反例を与えよ.

(解答例) L -構造 $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, P^{\mathcal{M}}, Q^{\mathcal{M}} \rangle$, $P^{\mathcal{M}} = \{0\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{1\}$ を考える. v を任意の付値とする.

このとき, $\llbracket \forall x P(x) \rrbracket_v = F$ より, $\llbracket \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \rrbracket_v = T$.
一方, $\llbracket P(x) \rightarrow Q(x) \rrbracket_{v[0/x]} = F$ であるから, $\llbracket \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rrbracket_v = F$. 従って, $\llbracket (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rrbracket_v = F$.

よって, $\llbracket (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rrbracket_{\mathcal{M}} = F$.
つまり, $\mathcal{M}$ は与えられた述語論理式の反例となる. $\square$

演習 18.11.

(1) シグニチャ $L = \langle \emptyset, \{P^2\} \rangle$ を考えるとき, $\forall x \exists y P(x, y)$ の反例を与えよ.

(2) シグニチャ $L = \langle \emptyset, \{Q^1\} \rangle$ を考えるとき, $\forall x \forall y (Q(x) \rightarrow Q(y))$ の反例を与えよ.

(解答例)

(1) L -構造として, $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}} \rangle$, $P^{\mathcal{A}} = \{ \langle x, y \rangle \mid x > y \}$ をとる. v を任意の付値とするとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $0 > n$ は成立しないから, $\llbracket P(x, y) \rrbracket_{v[0/x][n/y]} = F$. よって, $\llbracket \exists y P(x, y) \rrbracket_{v[0/x]} = F$. 従って, $\llbracket \forall x \exists y P(x, y) \rrbracket_v = F$. 以上より, $\llbracket \forall x \exists y P(x, y) \rrbracket_{\mathcal{M}} = F$ となるから, $\mathcal{M}$ は反例となる.

(2) L -構造として, $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$, $Q^{\mathcal{A}} = \{0\}$ をとる. v を任意の付値とするとき, $\llbracket Q(x) \rrbracket_{v[0/x][1/y]} = T$, $\llbracket Q(y) \rrbracket_{v[0/x][1/y]} = F$ より, $\llbracket Q(x) \rightarrow Q(y) \rrbracket_{v[0/x][1/y]} = F$ となる. よって, $\llbracket \forall y (Q(x) \rightarrow Q(y)) \rrbracket_{v[0/x]} = F$. 従って, $\llbracket \forall x \forall y (Q(x) \rightarrow Q(y)) \rrbracket_v = F$. 以上より, $\llbracket \forall x \forall y (Q(x) \rightarrow Q(y)) \rrbracket_{\mathcal{M}} = F$ となるから, $\mathcal{M}$ は反例となる.

演習 18.12. 下記のハッセ図(ア)～(エ)で表わされる半順序の L -構造について、以下の述語論理式のモデルとなるのはどれか.

(1) $\neg \exists y \forall x (x \leq y)$

(2) $\exists x \exists y \exists z (x < y \wedge y < z)$

(3) $\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$



(ア)



(イ)



(ウ)



(エ)



(ア)



(イ)



(ウ)



(エ)

(解答)

(1) $\neg \exists y \forall x (x \leq y)$

(ア), (ウ)

(2) $\exists x \exists y \exists z (x < y \wedge y < z)$

(ア), (イ), (エ)

(3) $\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$

(エ)

演習 18.13. シグニチャを $L = \langle \emptyset, \{P^2\} \rangle$ とするとき, L -構造 $\mathcal{M}_i = \langle |\mathcal{M}_i|, P^{\mathcal{M}_i} \rangle$ ($1 \leq i \leq 3$) を以下のように定める.

$$\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{N}, \{ \langle x, y \rangle \mid x < y \} \rangle$$

$$\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{N}, \{ \langle x, y \rangle \mid x \leq y \} \rangle$$

$$\mathcal{M}_3 = \langle \mathbb{N}, \{ \langle x, y \rangle \mid x + y = 10 \} \rangle$$

以下の(1)~(4)の述語論理式それぞれについて, $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_2$ のうちでそのモデルとなっている L -構造をすべて挙げよ.

(1) $\exists x \exists y P(x, y)$

(2) $\exists x \forall y P(x, y)$

(3) $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(y, x)$

(4) $\forall x (\exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, x))$

$$\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{N}, \{ \langle x, y \rangle \mid x < y \} \rangle$$

$$\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{N}, \{ \langle x, y \rangle \mid x \leq y \} \rangle$$

$$\mathcal{M}_3 = \langle \mathbb{N}, \{ \langle x, y \rangle \mid x + y = 10 \} \rangle$$

(解答)

(1) $\exists x \exists y P(x, y)$

$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$

(2) $\exists x \forall y P(x, y)$

$\mathcal{M}_2$

(3) $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(y, x)$

$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_3$

(4) $\forall x (\exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, x))$

$\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$

目次

- 述語論理式の恒真性
- 述語論理式の論理的同値性
- 代入の性質

述語論理式の論理的同値性

次に，述語論理式における，論理的同値性について紹介する．

定義 18.14. A, B をシグニチャ L 上の述語論理式とする．任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}$ 上の任意の付値 v について， $\llbracket A \rrbracket_v = \llbracket B \rrbracket_v$ となるとき，述語論理式 A と B は論理的同値であるといい， $A \cong B$ と記す．

述語論理の講義の最初の数回では，きちんとした意味論を与えずに，重要な述語論理式の真偽を議論した．

以下では，そこで説明した合同性や同値式の証明を，これまで説明してきた意味論に基づいて与える．

論理的同値性の合同性

定理 18.15. [再掲] 論理的同値性は述語論理式上の合同関係である。つまり、 $A \cong B$ ならば、 $\neg A \cong \neg B$, $Qx A \cong Qx B$ ($Q \in \{\forall, \exists\}$) が成立し、 $A \cong B$ かつ $C \cong D$ ならば、 $A \circ C \cong B \circ D$ ($\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$) が成立する。

(証明) ここでは、全称についての場合の証明のみを示す。残りは省略。
 $A \cong B$ と仮定する。このとき、任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}$ 上の任意の付値 v について、 $\llbracket A \rrbracket_v = \llbracket B \rrbracket_v$ 。このとき、 $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$

$\Leftrightarrow$ 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について、 $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$

$\Leftrightarrow$ 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について、 $\llbracket B \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$

$\Leftrightarrow \llbracket \forall x B \rrbracket_v = \text{T}$ 。

したがって、 $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \llbracket \forall x B \rrbracket_v$ 。

□

重要な同値式 (1) [再掲]

全称の交換 $\forall x \forall y A \cong \forall y \forall x A$

存在の交換 $\exists x \exists y A \cong \exists y \exists x A$

(証明) ここでは最初の同値式の証明だけ示す．残りは省略．

A をシグニチャ L 上の述語論理式とする．

任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と， L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について，
 $\llbracket \forall x \forall y A \rrbracket_v = \llbracket \forall y \forall x A \rrbracket_v$ となることを示せばよい．

$x = y$ の場合． $\forall x \forall x A \cong \forall x \forall x A$ となり，これは $\cong$ の反射性より成立する．

$x \neq y$ の場合． $\mathcal{M}$ を L -構造， v を $\mathcal{M}$ への付値とする．

このとき，解釈の定義より，

$$\llbracket \forall x \forall y A \rrbracket_v = \text{T}$$

$\Leftrightarrow$ 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket \forall y A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$

$\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = \text{T}$.

また,

$\llbracket \forall y \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$

$\Leftrightarrow$ 任意の $b \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket \forall x A \rrbracket_{v[b/y]} = \text{T}$

$\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket A \rrbracket_{v[b/y][a/x]} = \text{T}$.

このとき, $x \neq y$ より, $v[a/x][b/y] = v[b/y][a/x]$.

よって,

$\llbracket \forall x \forall y A \rrbracket_v = \text{T}$

$\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = \text{T}$

$\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket A \rrbracket_{v[b/y][a/x]} = \text{T}$

$\Leftrightarrow \llbracket \forall y \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$.

□

重要な同値式 (2) [再掲]

全称の分配 $\forall x (A \wedge B) \cong \forall x A \wedge \forall x B$

存在の分配 $\exists x (A \vee B) \cong \exists x A \vee \exists x B$

(証明) ここでは最初の同値式の証明だけ示す．残りは省略．

A をシグニチャ L 上の述語論理式とする．このとき，任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と， L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について， $\llbracket \forall x (A \wedge B) \rrbracket_v = \llbracket \forall x A \wedge \forall x B \rrbracket_v$ となることを示せばよい．これには， $\mathcal{M}$ を L -構造， v を $\mathcal{M}$ への付値としたとき， $\llbracket \forall x (A \wedge B) \rrbracket_v = \text{T} \Leftrightarrow \llbracket \forall x A \wedge \forall x B \rrbracket_v = \text{T}$ を示せばよい．

($\Rightarrow$) $\llbracket \forall x (A \wedge B) \rrbracket_v = \text{T}$ と仮定する．このとき，解釈の定義より，任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について， $\llbracket A \wedge B \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ ．従って， $a \in |\mathcal{M}|$ としたとき， $\llbracket A \wedge B \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ ．このとき，解

釈の定義より, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ かつ $\llbracket B \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$. よって, $a \in |\mathcal{M}|$ の取り方は任意だったから, $\llbracket \forall x A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ が成立する. 同様に, $\llbracket \forall x B \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ も成立する. よって, $\llbracket \forall x A \wedge \forall x B \rrbracket_v = \text{T}$ が成立する.

($\Leftarrow$) $\llbracket \forall x A \wedge \forall x B \rrbracket_v = \text{T}$ と仮定する. このとき, 釈の定義より, $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ および同様に, $\llbracket \forall x B \rrbracket_v = \text{T}$. よって, 釈の定義より, 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ が成立する. 同様に, 任意の $b \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket B \rrbracket_{v[b/x]} = \text{T}$ が成立する. よって, 任意の $c \in |\mathcal{M}|$ をとるとき, $\llbracket A \rrbracket_{v[c/x]} = \text{T}$ も $\llbracket B \rrbracket_{v[c/x]} = \text{T}$ も成立する. よって, 任意の $c \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket A \wedge B \rrbracket_{v[c/x]} = \text{T}$. すなわち, $\llbracket \forall x (A \wedge B) \rrbracket_v = \text{T}$. □

重要な同値式 (3) [再掲]

ド・モルガンの法則

$$\neg \forall x A \cong \exists x \neg A$$

$$\neg \exists x A \cong \forall x \neg A$$

(証明) ここでは最初の同値式の証明だけ示す．残りは省略．

A をシグニチャ L 上の述語論理式とする．このとき，任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と， L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について， $\llbracket \neg \forall x A \rrbracket_v = \llbracket \exists x \neg A \rrbracket_v$ となることを示せばよい．これには， v を $\mathcal{M}$ への付値としたとき， $\llbracket \neg \forall x A \rrbracket_v = \text{T} \Leftrightarrow \llbracket \exists x \neg A \rrbracket_v = \text{T}$ を示せばよい．

($\Rightarrow$) $\llbracket \neg \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ と仮定する．このとき，解釈の定義より， $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{F}$ ．よって，任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について

$\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ となることはない．つまり， $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{F}$ となる $a \in |\mathcal{M}|$ が存在する．このとき， $\llbracket \neg A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ ．よって，ある $a \in |\mathcal{M}|$ が存在して， $\llbracket \neg A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ となる．したがって， $\llbracket \exists x \neg A \rrbracket_v = \text{T}$ が成立する．

($\Leftarrow$) $\llbracket \exists x \neg A \rrbracket_v = \text{T}$ と仮定する．このとき，解釈の定義より，ある $a \in |\mathcal{M}|$ が存在して， $\llbracket \neg A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ となる．つまり， $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{F}$ となる $a \in |\mathcal{M}|$ が存在する．したがって，すべての $a \in |\mathcal{M}|$ について $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ ，ということは成立しない．つまり， $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{F}$ ．よって， $\llbracket \neg \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ ．

□

自由変数と解釈の等価性

重要な同値式 (4) の証明の準備として、以下の補題を示す。

補題 18.16. $\mathcal{M}$ を L -構造, v, v' を $\mathcal{M}$ 上の付値とする。

- (1) 任意の変数 $x \in V(t)$ について $v(x) = v'(x)$ が成立するとき, $\llbracket t \rrbracket_v = \llbracket t \rrbracket_{v'}$.
- (2) 任意の自由変数 $x \in FV(A)$ について $v(x) = v'(x)$ が成立するとき, $\llbracket A \rrbracket_v = \llbracket A \rrbracket_{v'}$.

(証明)

- (1) t に関する帰納法で、任意の $x \in V(t)$ について $v(x) = v'(x)$ ならば、 $\llbracket t \rrbracket_v = \llbracket t \rrbracket_{v'}$ となることを示す。

$t = x \in V$ の場合.

このとき, $V(t) = \{x\}$ であるから, 仮定より, $\llbracket t \rrbracket_v = v(x) = v'(x) = \llbracket t \rrbracket_{v'}$.

$t = f(t_1, \dots, t_n)$ の場合.

このとき, 定義から $V(t) = \bigcup_{i=1}^n V(t_i)$.

よって, $1 \leq i \leq n$ とするとき, $V(t_i) \subseteq V(t)$. 従って, 仮定より, 任意の $x \in V(t_i)$ について $v(x) = v'(x)$. よって, 帰納法の仮定から, $\llbracket t_i \rrbracket_v = \llbracket t_i \rrbracket_{v'}$ が成立する.

以上より,

$$\begin{aligned} \llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v &= f^{\mathcal{M}}(\llbracket t_1 \rrbracket_v, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v) \\ &= f^{\mathcal{M}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{v'}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{v'}) \\ &= \llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v'} \end{aligned}$$

(2) 述語論理式 A に関する帰納法で, 任意の $x \in \text{FV}(A)$ について $v(x) = v'(x)$ ならば $\llbracket A \rrbracket_v = \llbracket A \rrbracket_{v'}$ となることを示す.

$A = P(t_1, \dots, t_n)$ の場合.

このとき, 定義から $\text{FV}(A) = \bigcup_{i=1}^n V(t_i)$.

よって, 仮定より, 任意の $x \in V(t_i)$ について, $v(x) = v'(x)$.

従って, (1) から, $\llbracket t_i \rrbracket_v = \llbracket t_i \rrbracket_{v'}$.

よって,

$$\begin{aligned} & \llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v = \text{T} \\ \Leftrightarrow & \langle \llbracket t_1 \rrbracket_v, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v \rangle \in P^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow & \langle \llbracket t_1 \rrbracket_{v'}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{v'} \rangle \in P^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow & \llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v'} = \text{T} \end{aligned}$$

よって, 解釈の取り得る値は T, F であるから,

$$\llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v = \llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v'}.$$

$A = s \approx t$ の場合. 省略

$A \in \{\perp, \top\}$, $A = \neg B$ の場合. 省略

$A = B \wedge C$ の場合.

このとき, 定義から, $FV(A) = FV(B) \cup FV(C)$.

よって, 仮定より, 任意の $x \in FV(B)$ について $v(x) = v'(x)$,

また, 任意の $x \in FV(C)$ について $v(x) = v'(x)$.

よって, 帰納法の仮定より, $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket B \rrbracket_{v'}$ かつ $\llbracket C \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_{v'}$.

よって,

$$\begin{aligned} \llbracket B \wedge C \rrbracket_v = T &\Leftrightarrow \llbracket B \rrbracket_v = T \text{ かつ } \llbracket C \rrbracket_v = T \\ &\Leftrightarrow \llbracket B \rrbracket_{v'} = T \text{ かつ } \llbracket C \rrbracket_{v'} = T \\ &\Leftrightarrow \llbracket B \wedge C \rrbracket_{v'} = T \end{aligned}$$

よって, 解釈の取り得る値は T, F であるから,

$$\llbracket B \wedge C \rrbracket_v = \llbracket B \wedge C \rrbracket_{v'}.$$

$A = B \vee C, A = B \rightarrow C$ の場合. 省略.

$A = \forall y B$ の場合.

このとき, 定義から $FV(A) = FV(B) \setminus \{y\}$.

よって, 仮定より, 任意の $x \in FV(B)$ と任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について, $v[a/y] = v'[a/y]$ が成立する. よって, 帰納法の仮定より, $\llbracket B \rrbracket_{v[a/y]} = \llbracket B \rrbracket_{v'[a/y]}$. 従って,

$$\llbracket \forall y B \rrbracket_v = T$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket B \rrbracket_{v[a/y]} = T$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket B \rrbracket_{v'[a/y]} = T$$

$$\Leftrightarrow \llbracket \forall y B \rrbracket_{v'} = T$$

よって, 解釈の取り得る値は T, F であるから, $\llbracket \forall x B \rrbracket_v = \llbracket \forall x B \rrbracket_{v'}$.

$A = \exists y B$ の場合. 省略.

□

重要な同値式 (4) [再掲]

自由変数集合を利用した次の同値式が成立する.

束縛の導入・消去 ($x \notin \text{FV}(C)$ とする)

$$\forall x C \cong C, \quad \exists x C \cong C$$

束縛の移動 ($x \notin \text{FV}(C)$ とする)

$$\begin{aligned} \forall x (A \vee C) &\cong \forall x A \vee C, & \forall x (C \vee A) &\cong C \vee \forall x A, \\ \forall x (A \wedge C) &\cong \forall x A \wedge C, & \forall x (C \wedge A) &\cong C \wedge \forall x A, \\ \exists x (A \wedge C) &\cong \exists x A \wedge C, & \exists x (C \wedge A) &\cong C \wedge \exists x A, \\ \exists x (A \vee C) &\cong \exists x A \vee C, & \exists x (C \vee A) &\cong C \vee \exists x A \end{aligned}$$

(証明) ここでは最初の同値式の証明だけ示す. 残りは省略.

A, C をシグニチャ L 上の述語論理式とし, $x \notin \text{FV}(C)$ とす

る． 任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と， L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について， $\llbracket \forall x C \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v$ となることを示せばよい．

条件 $x \notin \text{FV}(C)$ から， 補題 **18.16(2)** より， $\llbracket C \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket C \rrbracket_v$ が成立することに注意すると，

$$\begin{aligned} \llbracket \forall x C \rrbracket_v = \text{T} &\Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket C \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T} \\ &\Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket C \rrbracket_v = \text{T} \\ &\Leftrightarrow \llbracket C \rrbracket_v = \text{T} \end{aligned}$$

よって， $\llbracket \forall x C \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v$.

□

束縛変数の名前替えの正しさ

重要な同値式 (5) の証明の準備として，以下の補題を示す．

補題 18.17. 項 t における変数 x の出現すべてを変数 $y \notin V(t)$ に置き替えて得られる項を t' とおき，述語論理式 A における変数 x の自由出現すべてを変数 $y \notin FV(A)$ に置き替えて得られる述語論理式を A' とおく．また， $\mathcal{M}$ を L -構造， v を $\mathcal{M}$ 上の付値とする．

- (1) 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について， $\llbracket t \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket t' \rrbracket_{v[a/y]}$ ．
- (2) 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について， $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket A' \rrbracket_{v[a/y]}$ ．
- (3) $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \llbracket \forall y A' \rrbracket_v$ ， $\llbracket \exists x A \rrbracket_v = \llbracket \exists y A' \rrbracket_v$ ．

(証明) (1) t に関する帰納法で， $\llbracket t \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket t' \rrbracket_{v[a/y]}$ となることを示す．

t が変数の場合.

$t = x$ の場合は, $\llbracket t \rrbracket_{v[a/x]} = a = \llbracket t' \rrbracket_{v[a/y]}$ より明らか. $t = y$ の場合は, $y \in V(y)$ となるから仮定に矛盾. $t = z \notin \{x, y\}$ の場合は, $\llbracket t \rrbracket_{v[a/x]} = v(z) = \llbracket t' \rrbracket_{v[a/y]}$ より明らか.

$t = f(t_1, \dots, t_n)$ の場合.

このとき, 項 t_i における変数 x の出現すべてを変数 y に置き替えて得られる項を t'_i とすると, $t = f(t'_1, \dots, t'_n)$ とおけ, 帰納法の仮定より $\llbracket t_i \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket t'_i \rrbracket_{v[a/y]}$ が成立する. よって,

$$\begin{aligned}\llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v[a/x]} &= f^{\mathcal{M}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{v[a/x]}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{v[a/x]}) \\ &= f^{\mathcal{M}}(\llbracket t'_1 \rrbracket_{v[a/y]}, \dots, \llbracket t'_n \rrbracket_{v[a/y]}) \\ &= \llbracket f(t'_1, \dots, t'_n) \rrbracket_{v[a/y]}\end{aligned}$$

(2) 述語論理式 A に関する帰納法で、任意の付値 v について、 $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket A' \rrbracket_{v[a/y]}$ となることを示す。

$A = P(t_1, \dots, t_n)$ の場合.

このとき、項 t_i における変数 x の出現すべてを変数 y に置き替えて得られる項を t'_i とすると、 $A' = P(t'_1, \dots, t'_n)$ とおけ、

(1) から、 $\llbracket t_i \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket t'_i \rrbracket_{v[a/y]}$ 。

よって、

$$\begin{aligned} & \llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v[a/x]} = \mathbf{T} \\ \Leftrightarrow & \langle \llbracket t_1 \rrbracket_{v[a/x]}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{v[a/x]} \rangle \in P^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow & \langle \llbracket t'_1 \rrbracket_{v[a/y]}, \dots, \llbracket t'_n \rrbracket_{v[a/y]} \rangle \in P^{\mathcal{M}} \\ \Leftrightarrow & \llbracket P(t'_1, \dots, t'_n) \rrbracket_{v[a/y]} = \mathbf{T} \end{aligned}$$

よって、解釈の取り得る値は $\mathbf{T}, \mathbf{F}$ であるから、

$$\llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v = \llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v'}.$$

$A = s \approx t$ の場合. 省略

$A \in \{\perp, \top\}$, $A = \neg B$ の場合. 省略

$A = B \wedge C$ の場合.

このとき, B および C における変数 x の自由出現すべてを変数 y に置き替えて得られる項をそれぞれ B', C' とすると, $A' = B' \wedge C'$ とおける. よって, 帰納法の仮定より,
 $\llbracket B \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket B' \rrbracket_{v[a/y]}$ かつ $\llbracket C \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket C' \rrbracket_{v[a/y]}$.
よって,

$$\begin{aligned}\llbracket B \wedge C \rrbracket_{v[a/x]} = \top &\Leftrightarrow \llbracket B \rrbracket_{v[a/x]} = \top \text{ かつ } \llbracket C \rrbracket_{v[a/x]} = \top \\ &\Leftrightarrow \llbracket B' \rrbracket_{v[a/y]} = \top \text{ かつ } \llbracket C' \rrbracket_{v[a/y]} = \top \\ &\Leftrightarrow \llbracket B' \wedge C' \rrbracket_{v[a/y]} = \top\end{aligned}$$

よって, 解釈の取り得る値は $\top, \text{F}$ であるから,

$$\llbracket B \wedge C \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket B' \wedge C' \rrbracket_{v[a/y]}.$$

$A = B \vee C$, $A = B \rightarrow C$ の場合. 省略.

$A = \forall z B$ の場合.

$x = z$ のときは, $A' = A$ となり自明. $y = z$ のときは, $y \in \text{FV}(A)$ に矛盾. $z \notin \{x, y\}$ のとき. このとき, B における変数 x の自由出現すべてを変数 y に置き替えて得られる項をそれぞれ B' とすると, $A' = \forall z B'$ とおける. よって, 帰納法の仮定より, 任意の $b \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket B \rrbracket_{v[b/z][a/x]} = \llbracket B' \rrbracket_{v[b/z][a/y]}$ が成立する. 従って, $\llbracket B \rrbracket_{v[a/x][b/z]} = \llbracket B' \rrbracket_{v[a/y][b/z]}$ が成立. 以上より,

$$\llbracket \forall z B \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } b \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket B \rrbracket_{v[a/x][b/z]} = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } b \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket B' \rrbracket_{v[a/y][b/z]} = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \llbracket \forall z B' \rrbracket_{v[a/y]} = \text{T}$$

よって, $\llbracket \forall x B \rrbracket_v = \llbracket \forall x B \rrbracket_{v'}$.

$A = \exists y B$ の場合. 省略.

□

(3) (2) より, 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \llbracket A' \rrbracket_{v[a/y]}$. よって,

$$\begin{aligned} \llbracket \forall x A \rrbracket_v &= T \\ \Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} &= T \\ \Leftrightarrow \text{任意の } b \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket A' \rrbracket_{v[a/y]} &= T \\ \Leftrightarrow \llbracket \forall y A' \rrbracket_v &= T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \llbracket \exists x A \rrbracket_v &= T \\ \Leftrightarrow \text{ある } a \in |\mathcal{M}| \text{ が存在して, } \llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} &= T \\ \Leftrightarrow \text{ある } a \in |\mathcal{M}| \text{ が存在して, } \llbracket A' \rrbracket_{v[a/y]} &= T \\ \Leftrightarrow \llbracket \exists y A' \rrbracket_v &= T \end{aligned}$$

よって, $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \llbracket \forall y A' \rrbracket_v$ および $\llbracket \exists x A \rrbracket_v = \llbracket \exists y A' \rrbracket_v$ が成立する.



重要な同値式 (5) [再掲]

束縛変数の名前替え

(A' は A から束縛変数の名前替えで得られるとする)

$$A \cong A'$$

(証明) A' を A から束縛変数の名前替えで得られる述語論理式とすると, A' は, A から補題18.17の操作を何回か繰り返して得られる. よって, 補題18.17(3)と $\cong$ の合同関係性から, $A \cong A'$. □

目次

- 述語論理式の恒真性
- 述語論理式の論理的同値性
- 代入の性質

代入の性質

束縛変数の名前替えの正しさが証明されたので、**以下では、束縛変数の名前替えの便宜法の使用を仮定する。**

補題 18.18. s をシグニチャ L 上の項, x を変数, v を L -構造 $\mathcal{M}$ への付値とする.

- (1) 任意の項 t について, $\llbracket x := s \rrbracket t \rrbracket_v = \llbracket t \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v / x]}.$
- (2) 任意の述語論理式 A について, $\llbracket x := s \rrbracket A \rrbracket_v = \llbracket A \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v / x]}.$

(証明) (1) t に関する帰納法で, $\llbracket x := s \rrbracket t \rrbracket_v = \llbracket t \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v / x]}$ を示す.

t が変数の場合.

$t = x$ の場合.

$\llbracket [x := s]x \rrbracket_v = \llbracket s \rrbracket_v = v(x) = \llbracket x \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v/x]}$ より成立.
 $t = y \neq x$ の場合.

$\llbracket [x := s]y \rrbracket_v = \llbracket y \rrbracket_v = v(y) = \llbracket y \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v/x]}$ より成立.
 $t = f(t_1, \dots, t_n)$ の場合.
 このとき, 帰納法の仮定より, 任意の $1 \leq i \leq n$ について,
 $\llbracket [x := s]t_i \rrbracket_v = \llbracket t_i \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v/x]}$ が成立する.

従って,

$$\begin{aligned} & \llbracket [x := s](f(t_1, \dots, t_n)) \rrbracket_v \\ &= \llbracket f([x := s](t_1), \dots, [x := s](t_n)) \rrbracket_v \\ &= f^{\mathcal{M}}(\llbracket [x := s](t_1) \rrbracket_v, \dots, \llbracket [x := s](t_n) \rrbracket_v) \\ &= f^{\mathcal{M}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v/x]}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v/x]}) \\ &= \llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v/x]} \end{aligned}$$

(2) 述語論理式 A に関する帰納法で, $\llbracket [x := s]A \rrbracket_v = \llbracket A \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v/x]}$ となることを示す.

$A = P(t_1, \dots, t_n)$ の場合.

(1)より, $\llbracket [x := s]t_i \rrbracket_v = \llbracket t_i \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v/x]}.$

よって,

$$\llbracket [x := s]A \rrbracket_v = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \llbracket [x := s]P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \llbracket P([x := s]t_1, \dots, [x := s]t_n) \rrbracket_v = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \langle \llbracket [x := s]t_1 \rrbracket_v, \dots, \llbracket [x := s]t_n \rrbracket_v \rangle \in P^{\mathcal{M}}$$

$$\Leftrightarrow \langle \llbracket t_1 \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v/x]}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v/x]} \rangle \in P^{\mathcal{M}}$$

$$\Leftrightarrow \llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v/x]} = \text{T}$$

よって, 解釈のとり値は T, F であるから,

$$\llbracket [x := s]t_i \rrbracket_v = \llbracket t_i \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v/x]}.$$

$A = s \approx t$ の場合. 省略

$A \in \{\perp, \top\}$ の場合. 省略

$A = \neg B$ の場合.

帰納法の仮定より, $\llbracket [x := s] B \rrbracket_v = \llbracket B \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v / x]}$.

よって,

$$\begin{aligned} \llbracket [x := s] \neg B \rrbracket_v = \text{T} &\Leftrightarrow \llbracket [x := s] B \rrbracket_v = \text{F} \\ &\Leftrightarrow \llbracket B \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v / x]} = \text{F} \Leftrightarrow \llbracket \neg B \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v / x]} = \text{T}. \end{aligned}$$

よって, 解釈のとり値は T, F であるから,

$$\llbracket [x := s] A \rrbracket_v = \llbracket A \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v / x]}.$$

$A = B \wedge C, A = B \vee C, A = B \wedge C$ の場合. 省略.

$A = \forall y B$ の場合.

$x = y$ の場合.

このとき, 解釈の定義から, $\llbracket [x := s] (\forall x B) \rrbracket_v = \llbracket \forall x B \rrbracket_v$.

ここで, $x \notin \text{FV}(\forall x B)$ であることから,

補題 18.16(2) より, $\llbracket \forall x B \rrbracket_v = \llbracket \forall x B \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v / x]}$.

よって, $\llbracket [x := s] \forall x B \rrbracket_v = \llbracket \forall x B \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v / x]}$.

$x \neq y$ の場合.

このとき, $\llbracket [x := s] \forall y B \rrbracket_v = \llbracket \forall y [x := s] B \rrbracket_v$.

よって,

$$\llbracket [x := s] \forall y B \rrbracket_v = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \llbracket \forall y [x := s] B \rrbracket_v = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket [x := s] B \rrbracket_{v[a/y]} = \text{T}$$

ここで, $b = \llbracket s \rrbracket_{v[a/y]}$ とおくと,

帰納法の仮定より, $\llbracket [x := s] B \rrbracket_{v[a/y]} = \llbracket B \rrbracket_{v[a/y][b/x]}$.

また, $x \neq y$ より, $\llbracket B \rrbracket_{v[a/y][b/x]} = \llbracket B \rrbracket_{v[b/x][a/y]}$.

一方, 束縛変数の名前替えの便宜法より, $y \notin V(s)$.

よって, 補題 18.16(2) より, $b = \llbracket s \rrbracket_{v[a/y]} = \llbracket s \rrbracket_v$.

以上より,

$$\text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket [x := s] B \rrbracket_{v[a/y]} = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket B \rrbracket_{v[a/y][b/x]} = \text{T}$$

$$\Leftrightarrow \text{任意の } a \in |\mathcal{M}| \text{ について, } \llbracket B \rrbracket_{v[b/x][a/y]} = \text{T}$$

$\Leftrightarrow$ 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket B \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v/x][a/y]} = \text{T}$

$\Leftrightarrow \llbracket \forall y B \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v/x]} = \text{T}$

よって, 解釈のとり値は T, F であることから,

$\llbracket [x := s] \forall y B \rrbracket_v = \llbracket \forall y B \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket_v/x]}.$

$A = \exists y B$ の場合. 省略.

□

恒真式の証明例 (1)

代入と全称 $\forall x A \rightarrow [x := t](A)$

代入と存在 $[x := t](A) \rightarrow \exists x A$

(証明) ここでは最初の論理式の証明だけ示す. 残りは省略.

A をシグニチャ L 上の述語論理式とする. $\mathcal{M}$ を任意の L -構造, v を L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値とし, $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ と仮定する.

解釈の定義から, 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$.

従って, $\llbracket t \rrbracket_v \in |\mathcal{M}|$ であるから, $\llbracket A \rrbracket_{v[\llbracket t \rrbracket_v/x]} = \text{T}$.

ここで, 補題18.18(2)より, $\llbracket [x := t]A \rrbracket_v = \llbracket A \rrbracket_{v[\llbracket t \rrbracket_v/x]}$ であるから, $\llbracket [x := t]A \rrbracket_v = \text{T}$.



$\forall x A \rightarrow [x := t](A)$ の逆向きの含意, つまり, $[x := t](A) \rightarrow \forall x A$ は一般には成立しない.

演習 18.19. シグニチャを $\langle \{a^0\}, \{P^1\} \rangle$ とするとき, $P(a) \rightarrow \forall x P(x)$ の反例を与えよ.

同様に, $[x := t](A) \rightarrow \exists x A$ の逆向きの含意, つまり, $\exists x A \rightarrow [x := t](A)$ は一般には成立しない.

演習 18.20. シグニチャを $\langle \{a^0\}, \{P^1\} \rangle$ とするとき, $\exists x P(x) \rightarrow P(a)$ の反例を与えよ.

全称一般化

$\forall x A \rightarrow [x := t](A)$ の特殊形である $\forall x A \rightarrow A$ も，一般には成立しない．しかし，次の命題は成立する．

定理 18.21. 任意の述語論理式 A と任意の変数 x について， A が恒真であれば， $\forall x A$ も恒真．

(証明) A を恒真な述語論理式とする．すると，定義より，任意の L -構造 $\mathcal{M}$ ， L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について， $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$ ．従って，特に，任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について， $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$ ．よって，定義から， $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ ．よって，任意の L -構造 $\mathcal{M}$ について， $\llbracket \forall x A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{T}$ となる．ゆえに， $\forall x A$ は恒真． □

恒真式の証明例 (2)

全称と存在 $\forall x A \rightarrow \exists x A$

全称と存在の交換 $\exists y \forall x A \rightarrow \forall x \exists y A$

(証明)

$\forall x A \rightarrow \exists x A$

A をシグニチャ L 上の述語論理式とする.

任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と, L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について,
 $\llbracket \forall x A \rightarrow \exists x A \rrbracket_v = \text{T}$ となること, つまり, $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ ならば $\llbracket \exists x A \rrbracket_v = \text{T}$ となることを示せばよい.

$\mathcal{M}$ を L -構造, v を $\mathcal{M}$ への付値とし, $\llbracket \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ を仮定する.

このとき, 解釈の定義より, 任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について,

$$\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}.$$

ここで、 L -構造の定義より、 $|\mathcal{M}| \neq \emptyset$ であるから、 $a \in |\mathcal{M}|$ なる a が少なくとも1つは存在する。

従って、ある $a \in |\mathcal{M}|$ が存在して、 $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$.

よって、解釈の定義より、 $\llbracket \exists x A \rrbracket_v = \text{T}$.

以上より、 $\llbracket \forall x A \rightarrow \exists x A \rrbracket_v = \text{T}$.

$$\frac{\exists y \forall x A \rightarrow \forall x \exists y A}{A \text{ をシグニチャ } L \text{ 上の述語論理式とする.}}$$

A をシグニチャ L 上の述語論理式とする。

任意の L -構造 $\mathcal{M}$ と、 L -構造 $\mathcal{M}$ への任意の付値 v について、 $\llbracket \exists y \forall x A \rightarrow \forall x \exists y A \rrbracket_v = \text{T}$ となること、つまり、 $\llbracket \exists y \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ ならば $\llbracket \forall x \exists y A \rrbracket_v = \text{T}$ となることを示せばよい。

(1) $x = y$ のとき。

$y \notin \text{FV}(\forall x A) = \text{FV}(\exists y A)$ と束縛の導入・消去規則 (??ページ

ジ)より, $\llbracket \exists y \forall x A \rrbracket_v = \llbracket \forall x A \rrbracket_v$, $\llbracket \forall x \exists y A \rrbracket_v = \llbracket \exists y A \rrbracket_v$.
よって, $\forall x A \rightarrow \exists x A$ の恒真性より成立する.

(2) $x \neq y$ のとき.

$\mathcal{M}$ を L -構造, v を $\mathcal{M}$ への付値とし, $\llbracket \exists y \forall x A \rrbracket_v = \text{T}$ を仮定する.

このとき, 解釈の定義より, ある $a \in |\mathcal{M}|$ が存在して,
 $\llbracket \forall x A \rrbracket_{v[a/x]} = \text{T}$. よって, 任意の $b \in |\mathcal{M}|$ について,
 $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = \text{T}$ となる.

このとき, $x \neq y$ より, $\llbracket A \rrbracket_{v[a/x][b/y]} = \llbracket A \rrbracket_{v[b/y][a/x]}$
であるから, すべての $b \in |\mathcal{M}|$ とある $a \in |\mathcal{M}|$ について,
 $\llbracket A \rrbracket_{v[b/y][a/x]} = \text{T}$.

よって, すべての $b \in |\mathcal{M}|$ について, $\llbracket \exists x A \rrbracket_{v[b/y]} = \text{T}$.
したがって, $\llbracket \forall y \exists x A \rrbracket_v = \text{T}$ となる.

まとめ

- 述語論理式の恒真性
 - モデルと反例
 - 恒真性の証明の例
 - 恒真性の反証の例
- 述語論理式の論理的同値性
 - 論理的同値性の合同性の証明
 - 重要な同値式の証明
- 代入の性質