2019年度 数理論理学

講義資料(19)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

- 述語論理の健全性定理の証明
- 述語論理の完全性定理の証明
- 公理化可能性と完全性定理

述語論理における健全性と完全性

健全性: 自然演繹体系で証明可能な述語論理式は恒真
完全性: 恒真な述語論理式は自然演繹体系で証明可能

$\underline{\Gamma \models A}$

任意の L-構造 $\mathcal{M}$，$\mathcal{M}$ への任意の付値 v について，任意の $B \in \Gamma$ について $[\![B]\!]_v = \mathrm{T}$ ならば $[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$.

$\underline{\Gamma \vdash A}$

除去されていない仮定が $\Sigma \subseteq \Gamma$，結論が A なる証明図が存在.

健全性: $\Gamma \vdash A \implies \Gamma \models A$
完全性: $\Gamma \vdash A \impliedby \Gamma \models A$

(ただし，健全性と完全性を合わせて，完全性とよぶこともある．)

健全性定理の証明

以下の補題2つはすでに与えた(講義資料(18)).

補題 19.1. vをL-構造$\mathcal{M}$への付値，$a \in |\mathcal{M}|$とする． **(1)** 任意の項tについて，$x \notin \mathrm{V}(t)$ならば，$[\![t]\!]_{v[a/x]} = [\![t]\!]_v$. **(2)** 任意の述語論理式$A$について，$x \notin \mathrm{FV}(A)$ならば，$[\![A]\!]_{v[a/x]} = [\![A]\!]_v$.

補題 19.2. sをシグニチャL上の項，xを変数，vをL-構造$\mathcal{M}$への付値とする． **(1)** 任意の項tについて，$[\![[x := s]t]\!]_v = [\![t]\!]_{v[[\![s]\!]_v/x]}$. **(2)** 任意の述語論理式$A$について，$[\![[x := s]A]\!]_v = [\![A]\!]_{v[[\![s]\!]_v/x]}$.

これらの補題を用いて健全性を示す.

補題 19.3. 証明図$\mathcal{D}$の除去されていない仮定の集合をΓ，結論をAとする．このとき，$\Gamma \models A$.

証明.

証明図$\mathcal{D}$の構造に関する帰納法を用いて示す．証明図$\mathcal{D}$の除去されていない仮定の集合をΓ，結論をAとおく．$\mathcal{M}$をL-構造，vを任意の付値とし，任意の$B \in \Gamma$について$[\![B]\!]_v = \mathrm{T}$を満たすとき，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$となることを示す.

推論規則がまだ**1**度も用いられていない場合，および，命題論理にも同じ推論規則がある場合は，命題論理の場合と同様に示されるので，以下ではそれ以外の場合についてのみ証明を示す.

1. 最後に用いられた推論規則が$\forall$の導入規則の場合.

このとき，証明図

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ C\end{array}$$

が存在して，$A = \forall x\, C$，かつ，

$$\mathcal{D} \quad = \quad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ C\end{array}}{\forall x\, C}\,\forall\mathrm{I}$$

$\mathcal{D}_1$の除去されていない仮定にxは自由に出現しないことから，任意の$B \in \Gamma$について$x \notin \mathrm{FV}(B)$.

帰納法の仮定から，$\Gamma \models C$.

今，付値 v が，任意の $B \in \Gamma$ について $[\![B]\!]_v = \mathrm{T}$ を満たすと仮定する．

$x \notin \mathrm{FV}(B)$ より，補題 **19.1** を用いて，任意の $a \in |\mathcal{M}|$ について $[\![B]\!]_{v[a/x]} = \mathrm{T}$.

$\Gamma \models C$ より $[\![C]\!]_{v[a/x]} = \mathrm{T}$．定義より，$[\![\forall x\, C]\!]_v = \mathrm{T}$.

2. 最後に用いられた推論規則が∀の除去規則の場合．

このとき，証明図

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \forall x\, C\end{array}$$

が存在して，$A = [x := t](C)$，かつ，

$$\mathcal{D} \quad = \quad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \forall x\, C\end{array}}{[x := t](C)}\,\forall\mathrm{E}$$

帰納法の仮定から，$\Gamma \models \forall x\, C$.

今，付値 v が，任意の $B \in \Gamma$ について $[\![B]\!]_v = \mathrm{T}$ を満たすと仮定する．すると，$[\![\forall x\, C]\!]_v = \mathrm{T}$.

特に，$[\![C]\!]_{v[[\![t]\!]_v/x]} = \mathrm{T}$.

よって，補題 **19.2** より，$[\![[x := t](C)]\!]_v = \mathrm{T}$.

3. 最後に用いられた推論規則が∃の導入規則の場合.

このとき，証明図

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ [x := t](C)\end{array}$$

が存在して，$A = \exists x\, C$，かつ，

$$\mathcal{D} \quad = \quad \cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ [x := t](C)\end{array}}{\exists x\, C}\,\exists\mathrm{I}$$

帰納法の仮定から，$\Gamma \models [x := t](C)$.

今，付値vが，任意の$B \in \Gamma$について$\llbracket B \rrbracket_v = \mathrm{T}$を満たすと仮定する．すると$\llbracket [x := t](C) \rrbracket_v = \mathrm{T}$.

補題 **19.2**より，$\llbracket C \rrbracket_{v[\llbracket t \rrbracket_v/x]} = \mathrm{T}$．従って，$\llbracket \exists x\, C \rrbracket_v = \mathrm{T}$.

4. 最後に用いられた推論規則が∃の除去規則の場合.

このとき，証明図

$$\begin{array}{ccc} & & [x := z](C) \\ \mathcal{D}_1 & & \mathcal{D}_2 \\ \exists x\, C & & A \end{array}$$

が存在して，

$$\mathcal{D} \quad = \quad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ \exists x\, C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[[x := z](C)] \\ \mathcal{D}_2 \\ A\end{array}}{A}\,\exists\mathrm{E}$$

このとき，$z \notin \mathrm{FV}(A) \cup \mathrm{FV}(C)$.

また，$\mathcal{D}_2$ の $[[x := z](C)]$ 以外の除去されていない仮定には z は自由に出現しない.

$\mathcal{D}_1$の除去されていない仮定の集合をΓ_1，$\mathcal{D}_2$の除去されていない仮定の集合をΓ_2とおく．

すると，$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$．帰納法の仮定から，$\Gamma_1 \models \exists x\, C$，および，$\Gamma_2 \cup \{[x := z](C)\} \models A$.

今，付値vが，任意の$B \in \Gamma$について$[\![B]\!]_v = \mathrm{T}$を満たすと仮定する．すると$[\![\exists x\, C]\!]_v = \mathrm{T}$.

従って，ある$a \in |\mathcal{M}|$が存在して，$[\![C]\!]_{v[a/x]} = \mathrm{T}$.

補題 **19.2**より，$[\![[x := z](C)]\!]_{v[a/z]} = \mathrm{T}$.

任意の$B \in \Gamma_2$に対して，$z \notin \mathrm{FV}(B)$であることから，$[\![B]\!]_{v[a/z]} = \mathrm{T}$.

$\Gamma_2 \cup \{[x := z](C)\} \models A$より，$[\![A]\!]_{v[a/z]} = \mathrm{T}$.

$z \notin \mathrm{FV}(A)$から，補題 **19.1**を用いて，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$.

5. 最後に用いられた推論規則が反射律の場合.

このとき，$A = \forall x\,(x \approx x)$，かつ，

$$\mathcal{D} \quad = \quad \cfrac{}{\forall x\,(x \approx x)}\,\mathrm{REFL}$$

$[\![\forall x\,(x \approx x)]\!]_v = \mathrm{T}$より，$\Gamma \models A$.

6. 最後に用いられた推論規則が代入法則の場合.

このとき，証明図

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ s \approx t\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ [x := s](C)\end{array}$$

が存在して，$A = [x := t](C)$，かつ，

$$\mathcal{D} \quad = \quad \cfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ s \approx t & [x := s](C)\end{array}}{[x := t](C)}\,\mathrm{SUBST}$$

$\mathcal{D}_1$の除去されていない仮定の集合をΓ_1，$\mathcal{D}_2$の除去されていない仮定の集合をΓ_2とおく．

すると，$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$．帰納法の仮定から，$\Gamma_1 \models s \approx t$，および，$\Gamma_2 \models [x := s](C)$．

今，付値vが，任意の$B \in \Gamma$について$\llbracket B \rrbracket_v = \mathrm{T}$を満たすと仮定する．すると$\llbracket s \rrbracket_v = \llbracket t \rrbracket_v$かつ$\llbracket [x := s](C) \rrbracket_v = \mathrm{T}$．

補題 **19.2**より，$\llbracket C \rrbracket_{v[\llbracket s \rrbracket/x]} = \mathrm{T}$．よって，$\llbracket s \rrbracket_v = \llbracket t \rrbracket_v$より，$\llbracket C \rrbracket_{v[\llbracket t \rrbracket/x]} = \mathrm{T}$．従って，補題 **19.2**より，$\llbracket [x := t](C) \rrbracket_v = \mathrm{T}$． $\square$

定理 19.4. [述語論理の健全性定理] Γを述語論理式の集合，Aを述語論理式とする．このとき，$\Gamma \vdash A \Longrightarrow \Gamma \models A$.

証明．$\Gamma \vdash A$と仮定.

定義より，除去されていない仮定の集合がΣ，結論がAとなる証明図$\mathcal{D}$が存在して，$\Sigma \subseteq \Gamma$.

補題 **19.3**より，$\Sigma \models A$.

今，$\mathcal{M}$をL-構造，vを$\mathcal{M}$への付値，任意の$B \in \Gamma$について，$[\![B]\!]_v = \mathrm{T}$を満たすと仮定.

すると，$\Sigma \subseteq \Gamma$および$\Sigma \models A$より，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$.

ゆえに，$\Gamma \models A$. $\square$

定理 19.5. [モデルの存在] Γを述語論理式の集合とする.
Γがモデルを持つならばΓは無矛盾.

証明. 対偶を示す. Γは矛盾すると仮定する. すると, $\Gamma \vdash \perp$. よって, ある述語論理式$A_1, \ldots, A_n \in \Gamma$が存在して, $\vdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$. 健全性定理より, $\models \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$. よって, 任意の$L$-構造$\mathcal{M}$について, $[\![\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)]\!]_{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$, つまり, $[\![A_1 \wedge \cdots \wedge A_n]\!]_{\mathcal{M}} = \mathrm{F}$となる. 従って, $i = 1, \ldots, n$のすべてについて, $[\![A_i]\!]_{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$となるような$L$-構造$\mathcal{M}$は存在しない. $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Gamma$より, すべての$A \in \Gamma$について, $[\![A]\!]_{\mathcal{M}} = \mathrm{T}$となるような$L$-構造$\mathcal{M}$は存在しない. よって, Γはモデルを持たない. $\square$

目次

- 述語論理の健全性定理の証明
- 述語論理の完全性定理の証明
- 公理化可能性と完全性定理

完全性定理の証明

ここでは，シグニチャが可算である場合についての完全性定理の証明を紹介する．

定義 19.6. [可算シグニチャ] シグニチャ $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ とする．$\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ が可算集合であるとき，L を可算シグニチャとよぶ．

補題 19.7. [述語論理式集合の可算性] L を可算シグニチャとするとき，L 上の述語論理式全体の集合は可算集合である．

証明．命題論理式集合全体の場合と同様にして出来る． □

補題 19.8. [無矛盾集合の拡大] $L_0 = \langle \mathcal{F}_0, \mathcal{P} \rangle$ を可算シグニチャ，$\Gamma = \Gamma_0$ を L_0 上の述語論理式の集合とする．

C_0 として，$C_0 \cap \mathcal{F}_0 = \emptyset$ となる可算無限個の定数の集合をとり，$c_0, c_1, \ldots$ をその数え上げとする．

また，$A_0, A_1, \ldots$ を $A_i = \exists x_i\, B_i$ の形をした L_0 上の述語論理式の数え上げとする．

(1) $L_1 = \langle \mathcal{F}_0 \cup C_0, \mathcal{P} \rangle$ は可算シグニチャ．
(2) L_1 上の述語論理式の集合 $\Theta_0 = \{A'_i \mid i \geq 0\}$ を以下により定義する：

$$A'_i \stackrel{\text{def}}{=} \exists x_i\, B_i \to [x_i := c_i](B_i)$$

このとき，Γ_0：無矛盾 $\Longrightarrow$ $\Gamma_0 \cup \Theta_0$：無矛盾．

証明．$\Gamma_0 \cup \Theta_0 \vdash \bot$と仮定する．このとき，ある$D_1, \ldots, D_k \in \Gamma_0$，$A'_{i_1}, \ldots, A'_{i_l} \in \Theta_0$が存在して，$\{D_1, \ldots, D_k, A'_{i_1}, \ldots, A'_{i_l}\} \vdash \bot$．このとき矛盾することを$l$に関する帰納法で示す．

$l = 0$のとき．Γ_0の無矛盾に矛盾する．

$l > 0$のとき．このとき，$A'_{i_l} = \exists x_l\, B_l \to [x_l := c_l](B_l)$より，

$$\vdash (\bigwedge_j D_j) \land (\bigwedge_{j<l} A_{i_j}) \to \exists x_l\, B_l \tag{1}$$

$$\vdash [x_l := c_l](B_l) \to \neg(\bigwedge_j D_j) \land (\bigwedge_{j<l} A_{i_j}) \tag{2}$$

が容易に導かれる．

定義から，このとき，$((\bigwedge_j D_j) \wedge (\bigwedge_{j<l} A_{i_j}))$は定数$c_l$を含まない．そこで，**(2)**の証明図中の$c_l$を証明図中に現われない新しい変数$y$で置きかえた証明図を$\mathcal{D}$とすると，

$$\dfrac{[\exists x_l\, B_l] \quad \begin{matrix}[[x_l := y](B_l)]^m \\ \mathcal{D} \\ \neg(\bigwedge_j D_j) \wedge (\bigwedge_{j<l} A_{i_j})\end{matrix}}{\neg(\bigwedge_j D_j) \wedge (\bigwedge_{j<l} A_{i_j})}\ \exists\mathrm{E}^m$$

なる証明図が構成できる．よって，$\vdash \exists x_l\, B_l \to \neg(\bigwedge_j D_j) \wedge (\bigwedge_{j<l} A_{i_j})$.

従って，これと **(2)** から，$\vdash (\bigwedge_j D_j) \wedge (\bigwedge_{j<l} A_{i_j}) \to \bot$となるが，これは帰納法の仮定$\{D_1, \ldots, D_k, A'_{i_1}, \ldots, A'_{i_{l-1}}\} \nvdash \bot$に矛盾. $\square$

定義 19.9. [述語論理式集合 Γ_ω] $L_0 = \langle \mathcal{F}_0, \mathcal{P} \rangle$ を可算シグニチャ，Γ_0 を L_0 上の無矛盾な述語論理式の集合とする．このとき，補題 **19.8** のようにして作った可算シグニチャ $L_1 = \langle \mathcal{F}_0 \cup C_0, \mathcal{P} \rangle$ 上の無矛盾な述語論理式の集合 $\Gamma_0 \cup \Theta_0$ を Γ_1 とおく．

同様にして，$C_1, C_2, \ldots$，$L_2, L_3, \ldots$，$\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ をとり，

$$C_\omega = \bigcup_{i \geq 0} C_i, \quad L_\omega = \bigcup_{i \geq 0} L_i, \quad \Gamma_\omega = \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i$$

とおく．

補題 19.10. [Γ_ω の性質] **(1)** Γ_ω は無矛盾．**(2)** $\exists x\, A$ なる L_ω 上の述語論理式について，ある定数 c が存在して，$\exists x\, A \to [x := c](A) \in \Gamma_\omega$.

証明.

(1) iに関する帰納法によりΓ_iが無矛盾であることが導かれる．今，Γ_ωが矛盾するとする．$\Gamma_\omega \vdash \perp$. 従って，除去していない仮定が$\Gamma_\omega$に含まれ，結論が$\perp$となる証明図が存在する．この除去していない仮定を$A_1, \ldots, A_n$とおくと，$\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash \perp$. $\{A_1, \ldots, A_n\}$は有限集合であるから，あるmが存在して，$A_1, \ldots, A_n \in \Gamma_m$. これは$\Gamma_m$が無矛盾であることに矛盾.

(2) $\exists x\, A$をL_ω上の述語論理式とする．このとき，$\exists x\, A$に表われる定数は有限個であるから，あるmが存在して，$\exists x\, A$はL_i上の述語論理式となる．よって，ある定数$c \in C_i$に対して，$\exists x\, A \to [x := c](A) \in \Gamma_{i+1} \subseteq \Gamma_\omega$となる． $\square$

補題 19.11. [極大無矛盾集合 $\widetilde{\Gamma}_\omega$ への拡大] ある極大無矛盾集合 $\widetilde{\Gamma}_\omega$ が存在して，$\Gamma_\omega \subseteq \widetilde{\Gamma}_\omega$ が成立する.

証明. 命題論理の場合と同様にして証明できる. $\square$

定義 19.12. L_ω 上の任意の項 s, t について，

$$s \sim t \overset{\text{def}}{\iff} \forall x_1, \ldots, x_n (s \approx t) \in \widetilde{\Gamma}_\omega$$

(ただし，$\mathrm{FV}(s) \cup \mathrm{FV}(t) = \{x_1, \ldots, x_n\}$) と定義する．

等号の推論規則と極大無矛盾集合の性質より $\sim$ は等価関係．$\sim$ の元での t の同値類を $[t]$ と記す．

補題 19.13. $t_i \sim s_i$ $(1 \leq i \leq n)$ とする．このとき，**(1)** $f(t_1, \ldots, t_n) \sim f(s_1, \ldots, s_n)$. **(2)** $P(t_1, \ldots, t_n) \in \widetilde{\Gamma}_\omega \iff P(s_1, \ldots, s_n) \in \widetilde{\Gamma}_\omega$.

証明．代入法則の推論規則と極大無矛盾集合の性質から明らか． □

定義 19.14. [L_ω-構造 $\mathcal{M}_C$] L_ω-構造 $\mathcal{M}_C = \langle U, P_0^{\mathcal{M}}, \ldots, f_0^{\mathcal{M}}, \ldots \rangle$ を以下により定義する．

$$U = \{[t] \mid t \text{ は } L_\omega \text{ 上の項}\}$$
$$P_i^{\mathcal{M}} = \{\langle [t_1], \ldots, [t_n] \rangle \mid P_i(t_1, \ldots, t_n) \in \widetilde{\Gamma}_\omega\}$$
$$f_i^{\mathcal{M}}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f_i(t_1, \ldots, t_n)]$$

補題**19.13**より $f_i^{\mathcal{M}}$ や $P_i^{\mathcal{M}}$ は**well-defined.**

定義 19.15. [代入 $\tilde{v}$] v を $\mathcal{M}_C$ への付値とする．それぞれの変数 x について，$t_x \in v(x)$ なる適当な項 t_x をとり，代入 $\tilde{v}$ を $\tilde{v}(x) = t_x$ により定める．

明らかに，$[\![\tilde{v}(s)]\!]_v$ や $[\![\tilde{v}(A)]\!]_v$ の値は t_x のとり かたによらないことに注意する．

補題 19.16. [代入 $\tilde{v}$ の性質] t を項，v を $\mathcal{M}_C$ への付値とする．このとき，$[\![t]\!]_v = [\tilde{v}(t)]$.

証明. t に関する帰納法で示す.

- $t = x \in V$ のとき.

$$[\![x]\!]_v = v(x) = [\tilde{v}(x)]$$

- $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ のとき.

$$\begin{aligned}
[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]_v &= f^{\mathcal{M}}([\![t_1]\!]_v, \ldots, [\![t_n]\!]_v) \\
&= f^{\mathcal{M}}([\tilde{v}(t_1)], \ldots, [\tilde{v}(t_n)]) \\
&= [f(\tilde{v}(t_1), \ldots, \tilde{v}(t_n))] \\
&= [\tilde{v}(f(t_1, \ldots, t_n))]
\end{aligned}$$

□

補題 19.17. [$\widetilde{\Gamma}_\omega$のモデル] AをL_ω上の述語論理式，vを$\mathcal{M}_C$への付値とする．このとき，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T} \iff \tilde{v}(A) \in \widetilde{\Gamma}_\omega$．

証明．述語論理式Aに含まれる論理結合子および量化記号の数の和に関する帰納法で示す．

1. $A = P(t_1, \ldots, t_n)$のとき．

$$
\begin{aligned}
[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]_v = \mathrm{T} &\iff \langle [\![t_1]\!]_v, \ldots, [\![t_n]\!]_v \rangle \in P^{\mathcal{M}} \\
&\iff \langle [\tilde{v}(t_1)], \ldots, [\tilde{v}(t_n)] \rangle \in P^{\mathcal{M}} \\
&\iff P(\tilde{v}(t_1), \ldots, \tilde{v}(t_n)) \in \widetilde{\Gamma}_\omega
\end{aligned}
$$

2. $A = s \approx t$のとき．

$$\begin{aligned} [\![s \approx t]\!]_v = \mathrm{T} &\iff [\![s]\!]_v = [\![t]\!]_v \\ &\iff [\tilde{v}(s)] = [\tilde{v}(t)] \\ &\iff \tilde{v}(s) \approx \tilde{v}(t) \in \widetilde{\Gamma}_\omega \end{aligned}$$

3. $A \in \{\perp, \neg B, B \wedge C, B \vee C, B \to C\}$のとき．

命題論理のときとほぼ同様にして出来るので省略する．

4. $A = \forall x\, B$のとき．

(⟹) $[\![\forall x\, B]\!]_v = \mathrm{T}$とすると，定義より，任意の項$t$について，$[\![B]\!]_{v[[t]/x]} = \mathrm{T}$，従って，補題 **19.2**より，$[\![[x := t](B)]\!]_v = \mathrm{T}$．帰納法の仮定より，$\tilde{v}([x := t](B)) \in \widetilde{\Gamma}_\omega$．よって，任意の項$t$について，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash \tilde{v}([x := t](B))$．

一方，補題 **19.10 (2)**より，$\exists x\, \neg\tilde{v}|_x(B) \to [x := c](\neg\tilde{v}|_x(B)) \in \widetilde{\Gamma} \subseteq \widetilde{\Gamma}_\omega$なる定数$c$が存在する．従って，$[x := c](\neg\tilde{v}|_x(B)) = \neg[x := c](\tilde{v}|_x(B))$に注意すると，以下の証明図により，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash [x := c](\tilde{v}|_x(B)) \to \forall x\, \tilde{v}|_x(B)$．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x\, \neg\tilde{v}|_x(B) \to [x := c](\neg\tilde{v}|_x(B))] \quad \dfrac{[\neg\tilde{v}|_x(B)]^1}{\exists x\, \neg\tilde{v}|_x(B)}\,\exists\mathrm{I}}{\neg[x := c](\tilde{v}|_x(B))}\,\neg\mathrm{E} \quad [[x := c](\tilde{v}|_x(B))]^2}{\bot}\,{\to}\mathrm{E}}{\tilde{v}|_x(B)}\,\mathrm{RAA}^1}{\forall x\, \tilde{v}|_x(B)}\,\forall\mathrm{I}}{[x := c](\tilde{v}|_x(B)) \to \forall x\, \tilde{v}|_x(B)}\,{\to}\mathrm{I}^2
$$

今，$t = c$ととれば，$\tilde{v}([x := t](B)) = [x := c](\tilde{v}|_x(B))$．よって，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash [x := c](\tilde{v}|_x(B))$．$\to$の除去規則により，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash \forall x\, \tilde{v}|_x(B)$．従って，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash \tilde{v}(\forall x\, B)$．よって，極大無矛盾集合の性質から $\tilde{v}(\forall x\, B) \in \widetilde{\Gamma}_\omega$．

($\Longleftarrow$) $\tilde{v}(\forall x\, B) \in \widetilde{\Gamma}_\omega$とする．すると，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash \tilde{v}(\forall x\, B)$．代入の定義より，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash \forall x\, \tilde{v}|_x(B)$．

$\forall$の除去規則から，任意の項tについて，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash [x := t](\tilde{v}|_x(B))$．$\tilde{v}([x := t](B)) = [x := \tilde{v}(t)](\tilde{v}|_x(B))$に注意すると，任意の項$t$について，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash \tilde{v}([x := t](B))$．

帰納法の仮定より，任意の項tについて，$[\![[x := t](B)]\!]_v = \mathrm{T}$．補題 **19.2**より，任意の項$t$について，$[\![B]\!]_{v[[t]/x]} = \mathrm{T}$．よって，$[\![\forall x\, B]\!]_v = \mathrm{T}$．

5. $A = \exists x\, B$のとき．

($\Longrightarrow$) $[\![\exists x\, B]\!]_v = \mathrm{T}$とすると，定義より，ある項$t$について，$[\![B]\!]_{v[[t]/x]} = \mathrm{T}$．補題 **19.2**より，$[\![[x := t]B]\!]_v = \mathrm{T}$．帰納法の仮定より，$\tilde{v}([x := t](B)) \in \widetilde{\Gamma}_\omega$．よって，$\tilde{v}([x := t](B)) = [x := \tilde{v}](\tilde{v}|_x(B))$．よって，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash [x := \tilde{v}(t)](\tilde{v}|_x(B))$．$\exists$の導入規則により，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash \exists x\, (\tilde{v}|_x(B))$ 代入の定義から，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash \tilde{v}(\exists x\, B)$ 極大無矛盾集合の性質から，$\tilde{v}(\exists x\, B) \in \widetilde{\Gamma}_\omega$．

($\Longleftarrow$) $\tilde{v}(\exists x\, B) \in \widetilde{\Gamma}_\omega$とする．$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash \tilde{v}(\exists x\, B)$．よって，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash \exists x\, \tilde{v}|_x(B)$．このとき，補題 **19.10 (2)**より，ある定数cが存在して，$\exists x\, \tilde{v}|_x(B) \to [x := c](\tilde{v}|_x(B)) \in \widetilde{\Gamma} \subseteq \widetilde{\Gamma}_\omega$．よって，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash \exists x\, \tilde{v}|_x(B) \to [x := c](\tilde{v}|_x(B))$．$\to$の除去規則により，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash [x := c](\tilde{v}|_x(B))$．$c$は定

数だから，$[x := c](\tilde{v}|_x(B)) = \tilde{v}([x := c](B))$．よって，$\widetilde{\Gamma}_\omega \vdash \tilde{v}([x := c](B))$．よって，極大無矛盾集合の性質から，$\tilde{v}([x := c](B)) \in \widetilde{\Gamma}_\omega$．帰納法の仮定から，$[\![[x := c](B)]\!]_v = \mathrm{T}$．補題 **19.2**より，$[\![B]\!]_{v[[c]/x]} = \mathrm{T}$．よって，$[\![\exists B]\!]_v = \mathrm{T}$．

$\square$

定義 19.18. [閉じた述語論理式] 自由変数を含まない述語論理式を閉じた述語論理式とよぶ.

系 19.19. [モデルの存在] Lを可算シグニチャ，ΓをL上の閉じた述語論理式の集合とする．このとき，Γが無矛盾ならば，そのモデルが存在する.

証明．Γが無矛盾とする.

このとき，補題 **19.8, 19.10, 19.11, 19.17**より，$\Gamma \subseteq \widetilde{\Gamma}_\omega$なる述語論理式の集合$\widetilde{\Gamma}_\omega$，$L_\omega$-構造$\mathcal{M}_C$，任意の$\mathcal{M}_C$への付値$v$と閉じた述語論理式$A \in \widetilde{\Gamma}_\omega$について$[\![A]\!]_v = \mathrm{T} \iff \tilde{v}(A) \in \widetilde{\Gamma}_\omega$が成立する.

$L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, $L_\omega = \langle \mathcal{F}_\omega, \mathcal{P} \rangle$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_\omega$に注意すると，$\mathcal{M}_C$の関数を一部削除して$L$-構造$\mathcal{M}'_C$が得られる.

今，任意の$\mathcal{M}'_C$への付値vと$A \in \Gamma$を考える．すると，vは$\mathcal{M}_C$への付値でもあるから，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T} \iff \tilde{v}(A) \in \widetilde{\Gamma}_\omega$が成立する．一方，$A$は閉じた述語論理式であるから，$\tilde{v}(A) = A$．よって，$A \in \Gamma \subseteq \widetilde{\Gamma}_\omega$より，$\tilde{v}(A) \in \widetilde{\Gamma}_\omega$．従って，$\mathcal{M}_C$上で$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$．$A$は$L$上の述語論理式であったから，$\mathcal{M}'_C$上でも$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$．

以上をまとめると，L-構造$\mathcal{M}'_C$について，任意の$\mathcal{M}'_C$への付値vと$A \in \Gamma$について，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$．従って，$\mathcal{M}'_C$はΓのモデルとなる． $\square$

定理 19.20. [述語論理の完全性定理]
Lを可算シグニチャ，ΓをL上の閉じた述語論理式の集合，AをL上の閉じた述語論理式とする．このとき，$\Gamma \models A \Longrightarrow \Gamma \vdash A$.

証明．対偶を証明する．

$\Gamma \nvdash A$とする．

このとき，$\Gamma \cup \{\neg A\}$は無矛盾.

系 **19.19**より，$\Gamma \cup \{\neg A\}$はモデルをもつ．

よって，$\Gamma \not\models A$. $\square$

コンパクト性定理

完全性定理から得られる性質の**1**つにコンパクト性がある．

定理 19.21. [コンパクト性定理] Γを閉じた述語論理式の集合とする．このとき，Γがモデルを持つ $\Longleftrightarrow$ Γの任意の有限部分集合がモデルを持つ．

証明． **($\Longrightarrow$)** 明らか． **($\Longleftarrow$)** 対偶を証明する．Γがモデルを持たないとする．系 **19.19**より，Γは矛盾する．よって，$\Gamma \vdash \perp$．よって，$\perp$を結論とし，この証明図に表われる仮定Δが$\Delta \subseteq \Gamma$であるような証明図が存在する．このとき，$\Delta \vdash \perp$かつΔは有限．Δは矛盾するから，定理 **19.5**よりΔはモデルを持たない． $\square$

(第一階) 述語論理の限界

$\leq$ を半順序とするとき，$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$ なる無限列を無限下降列とよぶ.

コンパクト性を用いて以下が証明できる.

命題 19.22. $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$，$\leq \in \mathcal{P}$ とする．このとき，以下を満たす (第一階) 述語論理式 A は存在しない：任意の L-構造 $\mathcal{M}$ で $[\![A]\!]_{\mathcal{M}} = \mathrm{T} \iff \leq^{\mathcal{M}}$ は無限下降列を持たない半順序.

高階述語論理

第一階述語論理の限界について見てきたが，記述力をより高めるために，(一般の数学では)高階の論理が用いられる．

第二階述語論理は，対象となる構造の部分集合を表わす変数とその変数に対する束縛を入れて拡張することによって得られる．

第三階述語論理は，対象となる構造の部分集合の集合を表わす変数とその変数に対する束縛を入れて拡張することによって得られる．

... というように，一般に n 階述語論理を考えることが出来る．これらを総称して，高階述語論理とよぶ．

目次

- 述語論理の健全性定理の証明
- 述語論理の完全性定理の証明
- 公理化可能性と 完全性定理

有限公理化可能性

(第一階) 述語論理の限界で触れたトピックをもう少し掘り下げて，構造のある特徴を (第一階) 述語論理式 A で表わすことが出来るかを一般的に表わす概念について説明する．

定義 19.23. [(有限) 公理化可能性]
(1) Γを閉じた述語論理式の集合とするとき，$\mathrm{Mod}(\Gamma)$は，Γが真となるすべてのL-構造のクラス[1]を表わす．
(2) $\mathcal{K}$をL-構造のクラスとする．$\mathcal{K}$が公理化可能であるとは，閉じた述語論理式の集合Γが存在して，$\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Gamma)$となるときをいう．
(3) $\mathcal{K}$をL-構造のクラスとする．$\mathcal{K}$が有限公理化可能であるとは，閉じた述語論理式の有限集合Γが存在して，$\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Gamma)$となるときをいう．

[1]'クラス'とは，集合として扱うには要素の数が大きすぎる集りと考えればよい．

例.

(1) 有限集合のクラスは公理化可能でない.

(2) 無限集合のクラスは公理化可能だが有限公理化可能でない.

(3) 無限下降列を持たない半順序集合のクラスは公理化可能でない.

定義 19.24. L をシグニチャ, $\mathcal{M}$ を L-構造とする. L 上の閉じた述語論理式の集合 $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ を以下のように定める:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \{A \mid \mathrm{FV}(A) = \emptyset, [\![A]\!]_{\mathcal{M}} = \mathrm{T}\}$$

$\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ は再帰的公理化可能だろうか?

帰納的集合と枚挙可能集合

　次に，有限公理化可能性よりも広く，実用性も失なわない再帰的公理化可能性について説明する．このために，帰納的集合と枚挙可能集合について説明する．

定義 19.25. Xをある有限記号列(整数，論理式，有限木，文字列，etc.)の集合とする．
(1) 任意の有限記号列aについて，$a \in X$ならば **Yes**，$a \notin X$ならば **No** を回答してくれるようなあるアルゴリズム(手続き，プログラム)が存在するとき，集合Xを帰納的集合(決定可能集合)とよぶ．
(2) Xの要素を数え上げるようなアルゴリズム(手続き，プログラム)が存在するとき，集合Xを枚挙可能集合とよぶ．

例.
(1) トートロジーの集合は帰納的である.
(2) **(**コンパイルを通る**)**プログラムの集合は帰納的である.
(3) 自然演繹の証明図の集合は帰納的である.

帰納的な集合は枚挙可能だが，その逆は必ずしも成立しない．また，ある集合とその補集合が枚挙可能ならば，その集合は帰納的となる.

(1) 入力aとプログラムPの対で，Pが入力aに対して停止する対の集合は帰納的でないが，枚挙可能である.
(2) 恒真な述語論理式の集合は帰納的でないが，枚挙可能である.
(3) 任意の入力に対して計算が停止するプログラムの集合は枚挙可能でない.

再帰的な公理系

定義 19.26. [再帰的な公理系] 公理系 Γ が再帰的集合であるとき，その公理系 Γ は再帰的であるという．L-構造のクラスが再帰的な公理系 Γ によって公理化可能なとき，再帰的公理化可能であるという．

特に，有限の閉じた述語論理式の集合は再帰的公理系である．公理系が無限集合であっても，再帰的であれば，公理が適用できるか否か判定できるので，充分な有用性をもつと考えてよい．

ペアノ算術の非標準モデル

容易に想像されるように，ペアノ算術は自然数に基づく構造$\langle \mathbb{N}, 0, S, +, \times \rangle$を意図した体系であるが，以下が成立する．

命題 19.27. ペアノ算術は $\langle \mathbb{N}, 0, S, +, \times \rangle$ 以外のモデルを持つ．

$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, \times \rangle$をペアノ算術の標準モデル，それ以外をペアノ算術の非標準モデルとよぶ．

もう1つの'完全性'

'完全性'という語は，完全性定理の'完全性'とは違う以下の意味でも用いられる．

定義 19.28. [公理系の完全性] Γを公理系とする．任意の閉じた述語論理式Aについて，$\Gamma \vdash A$または$\Gamma \vdash \neg A$が成立するとき，公理系Γは完全であるという．完全でない公理系は不完全であるという．

この意味での完全性は，モデルを一意に決めているかという意味と対応する．

命題 19.29. Γを無矛盾な公理系とする．Γは完全$\Longleftrightarrow$あるL-構造$\mathcal{M}$が存在して，$\{A \mid \mathrm{FV}(A) = \emptyset, \Gamma \vdash A\} = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$.

不完全性定理

定理 **19.30. [(第一)不完全性定理]** ペアノ算術を含む再帰的な公理系は，無矛盾ならば，不完全である.

従って，$\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ は再帰的公理化可能ではないことがわかる.

本当のゲーデルの(第一)不完全性定理の言明はもう少し強いが，正確な記述には準備が足りないのでここでは立ち入らない．なお，ゲーデルの不完全性定理とよばれるものには第二不完全性定理もある.

まとめ

- 健全性と完全性

  健全性: 証明可能 $\Rightarrow$ 恒真

  完全性: 恒真 $\Rightarrow$ 証明可能

- 公理系と公理化可能性