

2020年度 数理論理学

講義資料(9)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

- 健全性と完全性
- 健全性定理の証明
- 数え上げとカントールの対角線論法
- 完全性定理の証明

自然演繹法の正しさと一般性

自然演繹体系を用いた証明図の構成法について学んだ。
この証明の方法は正しいのだろうか？ 逆に，一般性はある
のだろうか？

証明図で証明できる命題論理式を **定理** と呼んだ。

証明のやり方は正しい，ということは，定理はトートロジーである，つまり， A が定理であれば A はトートロジーである，と言い替えることが出来る。

逆に，**証明のやり方に一般性がある**，ということは，トートロジーは定理である，つまり， A がトートロジーであれば， A は定理である (A の証明図がある)，と言い替えることが出来る。

健全性と完全性

このようなトートロジーと定理の対応関係を，健全性・完全性という．

健全性： 自然演繹体系で証明可能な命題論理式はトートロジー

完全性： トートロジーは自然演繹体系で証明可能

この後でその証明を紹介するが，以下の定理が成り立つ．

定理 9.1. [**健全性定理**] 自然演繹体系で証明可能な命題論理式は，トートロジーである．

定理 9.2. [**完全性定理**] 命題論理式がトートロジーならば，自然演繹体系で証明可能である．

健全性と完全性の両方を合わせて，完全性とよぶこともある．

健全性定理と完全性定理から，以下が成立する．

系 9.3. 任意の命題論理式は，自然演繹体系で証明可能であるか，あるいは反例を持つかのどちらか一方である．

構文論では，「証明できないこと」を示すのは，通常は困難．完全性を経由することで，「証明できないこと」を示すには，反例を与えればよいことがわかる．

演習 9.4. 以下の命題論理式について，トートロジーならばその証明図を示し，トートロジーでないなら反例を与えよ．

(1) $P \rightarrow P \rightarrow Q$

(2) $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P \vee Q$

(解答)

(1) $v(P) = T$, $v(Q) = F$ なる付値 v をとると, $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket_v = F$. よって, $\llbracket P \rightarrow P \rightarrow Q \rrbracket_v = F$. したがって, v は $P \rightarrow P \rightarrow Q$ の反例となる.

(2)

$$\begin{array}{c}
 \frac{P \vee \neg P}{\text{EM}} \quad \frac{[P]^1}{P \vee Q} \vee I \quad \frac{\frac{[\neg P \rightarrow Q]^2 \quad [\neg P]^1}{Q} \rightarrow E}{P \vee Q} \vee I \\
 \hline
 \frac{P \vee Q}{(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P \vee Q} \rightarrow I^2
 \end{array}$$

構文論と意味論

自然演繹体系のような，記号列の操作に基づく導出体系は**形式体系**とよばれる．形式体系が弱すぎると，真な命題が全部導出できなくなるし，逆に形式体系が強すぎて偽な命題も導出できてしまうと，矛盾が導出できて(体系は矛盾するという)， $\perp$ -規則や対応する規則からすべての命題論理式が導出できてしまう．

形式体系による導出可能性に基づいて正しさを規定する方法論を**構文論**とよぶ．本講義では，自然演繹体系の証明可能性を構文論として用いたが，自然演繹体系以外の体系(シーケント計算やヒルベルト流の体系など)を用いる場合もある．

一方，トートロジーでは，論理式の正しさを，抽象的な世界である真理値集合 $\{T, F\}$ 上で議論している．このように抽象化された世界で真偽を規定する方法を**意味論**とよぶ．

構文論と意味論が対応していることは、論理の妥当性を示す上で重要である。つまり、真偽の概念が定義できても、正しいことを証明する方法がなかったり、証明のやり方を決めても証明できる命題が真な命題であることがうまく説明できないのでは、論理が妥当であるとはいいづらいであろう。

証明可能性やトートロジーは，以下のように仮定のある場合に一般化することができる．

$\Gamma \models A$

任意の付値 v について，任意の $B \in \Gamma$ について $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ ならば $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$.

$\Gamma \vdash A$

除去されていない仮定が $\Sigma \subseteq \Gamma$ ，結論が A なる証明図が存在．

証明可能性については，証明図に現われる仮定よりも多くの仮定集合をとってもよいことに注意．これによって，対応関係が非常に見通しよくなる．

健全性と完全性による対応関係を記号で記述すると

$$\Gamma \vdash A \iff \Gamma \models A$$

となる.

以下では, 次の記法を用いる.

$$\Gamma \not\vdash A \iff \Gamma \vdash A \text{ でない.}$$

$$\Gamma \not\models A \iff \Gamma \models A \text{ でない.}$$

目次

- 健全性と完全性
- 健全性定理の証明
- 数え上げとカントールの対角線論法
- 完全性定理の証明

健全性定理の証明方針

証明図の構造に関する帰納法で、「任意の証明図 $\mathcal{D}$ について、 $\mathcal{D}$ の除去されていない仮定の集合を Γ 、 $\mathcal{D}$ の結論を A とするとき、 $\Gamma \vdash A$ が成立する」を証明する。

自然演繹法の証明図をきちんとした定義を紹介していなかったが、以下のように帰納的に定義される。

定義 9.5. 自然演繹法の証明図を以下のように帰納的に定義する：

- (1) 任意の命題論理式 A について、 $[A]$ は証明図。
- (2) $\mathcal{D}$ を証明図とするとき、 $\mathcal{D}$ に自然演繹法の推論規則を適用して得られる図は証明図。

補題 9.6. 証明図 $\mathcal{D}$ の除去されていない仮定の集合を Γ , 結論を A とする. このとき, $\Gamma \vdash A$.

証明.

証明図 $\mathcal{D}$ の構造に関する帰納法を用いて示す. 以下では, 証明図 $\mathcal{D}$ の除去されていない仮定の集合を Γ , 結論を A とおく.

また, 結論が C で, 除去されていない仮定 $[B]$ や除去されていた仮定 $[B]^i$ を含む証明図 $\mathcal{D}_1$ を,

$$\frac{[B]}{\mathcal{D}_1} \frac{}{C} \quad \text{や} \quad \frac{[B]^i}{\mathcal{D}_1} \frac{}{C}$$

と記す.

1. 推論規則がまだ1度も用いられていない場合.

$$\mathcal{D} = [A]$$

付値 v が, 任意の $B \in \Gamma$ について $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ を満たすと仮定する.

$A \in \Gamma$ より $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$. ゆえに, $\Gamma \models A$.

2. 最後に用いられた推論規則が $\rightarrow$ の導入規則の場合.

このとき, 証明図

$$\begin{array}{c} [C] \\ \mathcal{D}_1 \\ D \end{array}$$

が存在して, $A = C \rightarrow D$, かつ,

$$\mathcal{D} = \frac{\begin{array}{c} [C]^i \\ \mathcal{D}_1 \\ D \end{array}}{C \rightarrow D} \rightarrow I^i$$

$\mathcal{D}_1$ の除去されていない仮定の集合を Γ_1 とおく.

$$\Gamma_1 \subseteq \Gamma \cup \{C\}.$$

帰納法の仮定から, $\Gamma_1 \models D$ が成立.

今、付値 v が、任意の $B \in \Gamma$ について $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ を満たすと仮定する.

(a) $\llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$ のとき.

$\Gamma_1 \subseteq \Gamma \cup \{C\}$ より任意の $B \in \Gamma_1$ について $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$.

よって, $\Gamma_1 \models D$ より, $\llbracket D \rrbracket_v = \text{T}$.

従って, 解釈の定義より $\llbracket C \rightarrow D \rrbracket_v = \text{T}$.

(b) $\llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$ のとき.

解釈の定義より $\llbracket C \rightarrow D \rrbracket_v = \text{T}$.

以上より, $\Gamma \models A$.

3. 最後に用いられた推論規則が $\rightarrow$ の除去規則の場合.
このとき, 証明図

$$C \xrightarrow{\mathcal{D}_1} A \quad \mathcal{D}_2 \frac{C}{C}$$

が存在して,

$$\mathcal{D} = \frac{\frac{C \xrightarrow{\mathcal{D}_1} A}{A} \quad \mathcal{D}_2 \frac{C}{C}}{\rightarrow E}$$

$\mathcal{D}_1$ の除去されていない仮定の集合を Γ_1 , $\mathcal{D}_2$ の除去されていない仮定の集合を Γ_2 とおく.

すると, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$.

帰納法の仮定から, $\Gamma_1 \models C \rightarrow A$ かつ $\Gamma_2 \models C$.

今、付値 v が、任意の $B \in \Gamma$ について $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ を満たすと仮定する.

$\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ より、任意の $B \in \Gamma_1$ について $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$.

$\Gamma_1 \models C \rightarrow A$ より、 $\llbracket C \rightarrow A \rrbracket_v = \text{T}$.

$\llbracket C \rightarrow A \rrbracket_v = \text{T}$ より $\llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$ または $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$.

$\Gamma_2 \subseteq \Gamma$ および $\Gamma_2 \models C$ より、 $\llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$.

$\llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$ より $\llbracket C \rrbracket_v \neq \text{F}$

$\llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$ または $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$ より $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$.

以上より、 $\Gamma \models A$.

4. 最後に用いられた推論規則が $\wedge$ の導入規則の場合.
このとき, 証明図

$$\frac{\mathcal{D}_1}{C} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{D}$$

が存在して, $A = C \wedge D$, かつ,

$$\mathcal{D} = \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{C} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{D}}{C \wedge D} \wedge I$$

$\mathcal{D}_1$ の除去されていない仮定の集合を Γ_1 , $\mathcal{D}_2$ の除去されていない仮定の集合を Γ_2 とおく.

すると, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$.

帰納法の仮定から, $\Gamma_1 \models C$ および $\Gamma_2 \models D$.

今、付値 v が、任意の $B \in \Gamma$ について $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ を満たすと仮定する.

$\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ より、任意の $B \in \Gamma_1$ について $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$.

$\Gamma_1 \models C$ より、 $\llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$.

同様に、 $\Gamma_2 \subseteq \Gamma$ および $\Gamma_2 \models D$ より、 $\llbracket D \rrbracket_v = \text{T}$.

解釈の定義から $\llbracket C \wedge D \rrbracket_v = \text{T}$.

以上より、 $\Gamma \models A$.

5. 最後に用いられた推論規則が $\wedge$ の除去規則の場合.

このとき, 証明図

$$\frac{\mathcal{D}_1}{A \wedge C}$$

が存在して,

$$\mathcal{D} = \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{A \wedge C}}{A} \wedge E$$

あるいは,

$$\frac{\mathcal{D}_2}{C \wedge A}$$

が存在して,

$$\mathcal{D} = \frac{\frac{\mathcal{D}_2}{C \wedge A}}{A} \wedge E$$

前者の場合を考える．（後者の場合についても同様．）

$\mathcal{D}_1$ の除去されていない仮定の集合は Γ ．

帰納法の仮定から， $\Gamma \models A \wedge C$ ．

今，付値 v が，任意の $B \in \Gamma$ について $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ を満たすと仮定する．

$\Gamma \models A \wedge C$ より， $\llbracket A \wedge C \rrbracket_v = \text{T}$ ．

解釈の定義から $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$ ．

よって， $\Gamma \models A$ ．

6. 最後に用いられた推論規則が... の場合．

その他の場合も同様にして証明できる．



定理 9.7. [命題論理の健全性定理] Γ を命題論理式の集合, A を命題論理式とする. このとき, $\Gamma \vdash A \implies \Gamma \models A$.

証明. $\Gamma \vdash A$ と仮定.

定義より, 除去されていない仮定の集合が Σ , 結論が A となる証明図 $\mathcal{D}$ が存在して, $\Sigma \subseteq \Gamma$.

補題 9.6 より, $\Sigma \models A$.

付値 v が, 任意の $B \in \Gamma$ について, $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ を満たすと仮定.

すると, $\Sigma \subseteq \Gamma$ および $\Sigma \models A$ より, $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$.

ゆえに, $\Gamma \models A$.

□

目次

- 健全性と完全性
- 健全性定理の証明
- 数え上げとカントールの対角線論法
- 完全性定理の証明

数え上げ

完全性定理の証明に重要な数え上げという概念を紹介する.

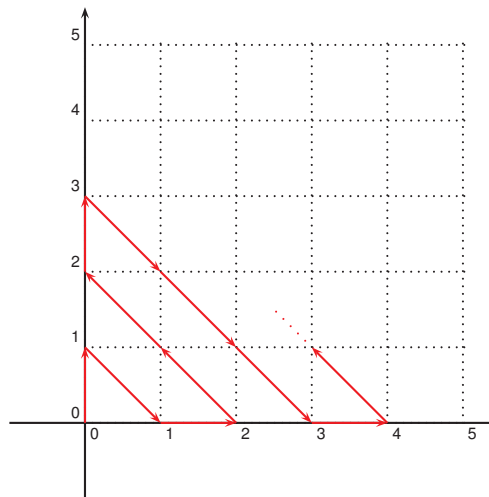
定義 9.8. 集合 Γ の数え上げとは, Γ の要素の列 $a_0, a_1, \dots$ ($i \in \mathbb{N}$) で, 任意の要素 $b \in \Gamma$ についてある i が存在して, $b = a_i$ となるものをいう. 集合 Γ の数え上げがあるとき, Γ を数え上げ可能あるいは可算という. 数え上げ可能でないとき非可算という.

例. 整数の数えあげ.

$0, 1, 2, 3, \dots$ のように数えていくと, いつまで数えていっても負の数が出てこない. $0, 1, -1, 2, -2, \dots$ のように数えあげればよい. よって, 全整数の集合 $\mathbb{Z}$ は数え上げ可能である.

演習 9.9. 非負整数平面を数えあげよ.

非負整数平面の数え上げ



演習 9.10. 有理数全体の集合は数えあげ可能か？

演習 9.11. 実数全体の集合は数えあげ可能か？

有理数は分数だと思えばよいので、整数平面が数え上げられればよい。整数平面の数え上げは、

$$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, -1), (-1, -1), (0, 2), (1, 1), \dots$$

という具合。実数全体の集合は数えあげ可能でないこと (非可算集合であること) が証明できる ($\Rightarrow$ **カントールの対角線論法**)

補題 9.12. 命題論理式の集合は数え上げ可能である。

(証明) 1. Γ_i を以下のような命題論理式の集合とする。

$$\Gamma_i = \{A \mid V(A) \subseteq \{P_0, P_1, \dots, P_i\}\}$$

(命題変数として $P_0, P_1, \dots, P_i$ 以外を用いていない命題論理式の集合)

2. 次に, $\Gamma_i^0, \Gamma_i^1, \Gamma_i^2, \dots$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned}\Gamma_i^0 &= \{A \in \Gamma_i \mid c(A) = 0\} = \{P_0, P_1, \dots, P_i\} \\ \Gamma_i^1 &= \{A \in \Gamma_i \mid c(A) = 1\} = \{\perp, (\neg P_0), (\neg P_1), \dots, (P_0 \wedge P_0), (P_0 \wedge P_1), \dots\} \\ \Gamma_i^2 &= \{A \in \Gamma_i \mid c(A) = 2\}\end{aligned}$$

このとき, $\Gamma_i = \bigcup_{j \geq 0} \Gamma_i^j$, かつ, Γ_i^j のそれぞれは有限集合. よって,

Γ_i^0 の全要素の並び, Γ_i^1 の全要素の並び, $\dots$

は Γ_i の数え上げになっている. この数え上げを σ_i とおく.

3. $\sigma_0, \sigma_1, \dots$ を縦に並べて, これを非負整数平面の数えあげと同様にして数えあげる.

4. 任意の命題論理式 A について, $V(A)$ は有限集合. よって, $|V(A)| = n$ なる自然数 n が存在する. このとき, $A \in \Gamma_n$ であるから, A は σ_n の中出现する. よって, 任意の命題論理式が上記の数え上げ列の中中出现するので, これは命題論理式の数え上げになっている.

同様にして,

- ラベル集合が可算集合であるとき, ラベル付き有限木全体の集合は数え上げ可能.
- 自然演繹体系の証明図全体の集合は数え上げ可能

などを示すことが出来る.

カントールの対角線論法

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ が非可算集合であることの証明に用いられる証明手法はカントールの対角線論法とよばれており、非常に有名。帰納的関数論 (計算可能性についての理論) などでは多用される論法でもある。この証明を紹介する。

定理 9.13. $\mathbb{R}$ は非可算集合である。

証明. 集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 10\}$ を $[0, 10)$ とおく。 $[0, 10) \subseteq \mathbb{R}$ より、 $[0, 10)$ が数え上げ可能ではないことを示せば充分である。数え上げ可能であった仮定して矛盾を示す。

今, $r_0, r_1, \dots$ のように $[0, 10)$ を数え上げることが出来たとする.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	(桁数)
$r_0 :$	0.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
$r_1 :$	0.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
$r_2 :$	0.	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
$r_3 :$	0.	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
$r_4 :$	0.	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0	0	0	...
.....														

数え上げの定義から, 任意の $0 \leq a < 10$ なる実数 a について, $r_n = a$ となるような $n \in \mathbb{N}$ が存在することに注意.

$n \in \mathbb{N}$ について, r_n の小数点以下第 n 桁の数字を d_n とおく. (ただし, 整数桁は小数点第0桁として考える)
 ただし, 有限小数は最後に0が続く形で表わすことにしておく. (有限小数は最後に9が続く形で表せるため. 例えば, $1 = 1.00000 \dots = 0.999999 \dots$.)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	
$r_0 :$	0.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	$(d_0 = 0)$
$r_1 :$	0.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	$(d_1 = 1)$
$r_2 :$	0.	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	$(d_2 = 2)$
$r_3 :$	0.	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	...	$(d_3 = 3)$
$r_4 :$	0.	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0	0	...	$(d_4 = 4)$
.....														

次に，次のような実数 a を考える．

a の小数点第 n 桁 $\tilde{d}_n$ は d_n と異なる0～9のある数字
(ただし，整数桁は小数点第0桁として考える)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	
$r_0 :$	0	.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	$(d_0 = 0)$
$r_1 :$	0	.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	$(d_1 = 1)$
$r_2 :$	0	.	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	...	$(d_2 = 2)$
$r_3 :$	0	.	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	...	$(d_3 = 3)$
$r_4 :$	0	.	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0	...	$(d_4 = 4)$
.....														
$a :$	1	.	2	3	4	5	...							

例では $\tilde{d}_n = (d_n + 1) \bmod 10$ ととったが，どのようにとってもよい． $a \in [0, 10)$ となっていることに注意．

ここで、 $[0, 10)$ が $r_0, r_1, \dots$ のように数え上げ出来たと仮定していたので、 a は $r_0, r_1, \dots$ のどこかで出現することになる。つまり、ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $a = r_k$ となっているはず。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$r_0 :$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
$r_1 :$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
$r_2 :$	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
.....													
$r_k :$	 	 	 	 	 	 	 	 	 	 	 	 	...
.....													
$a :$	1	2	3	4	5	...							

このとき， a および r_k の小数点第 k 桁の数(0～9の数字)を考える． $a = r_k$ であったから k 桁目の数も同じはずである．

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	k
$r_0 :$	0	.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0
$r_1 :$	0	.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0
$r_2 :$	0	.	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0
$r_3 :$	0	.	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	...	0
.....														
$r_k :$	$\square$	.	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	...	d_k
.....														
$a :$	1	.	2	3	4	5	...							$\tilde{d}_k$

しかし，実際には， k がいくつであっても以下のように矛盾する．

$a (= r_k)$ の小数点以下第 k 桁が **0～9** のどれになっているか考える．

まず， a のとり方より小数点以下第 k 桁は $\tilde{d}_k$ のはずである．一方， r_k の小数点以下第 k 桁は d_k のはずである．

ところが， $\tilde{d}_k$ は， $d_k \neq \tilde{d}_k$ となるようにとったのであったから，これは矛盾．

□

目次

- 健全性と完全性
- 健全性定理の証明
- 数え上げとカントールの対角線論法
- 完全性定理の証明

完全性定理の証明方針

対偶, つまり, 「 $\Gamma \not\models A \Rightarrow \Gamma \models A$ 」を示す.

このとき, “ならば” の前提と結論に関する以下の同値性 (1) と (2), および, 性質 (3) を用いる:

- (1) $\Gamma \not\models A \iff \Gamma \cup \{\neg A\}$ は無矛盾.
- (2) $\Gamma \models A \iff \Gamma \cup \{\neg A\}$ はモデルをもつ.
- (3) 任意の無矛盾集合 Γ について, モデルが存在する.

(1)–(3) から, 「 $\Gamma \not\models A \Rightarrow \Gamma \models A$ 」が得られることは明らか.

以下では, 証明が容易な順に, (2), (1), (3) の順で示す.

命題論理式集合のモデル

命題論理式 A のモデルとは, $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$ となる付値 v のことをいった. これを命題論理式集合の場合へ拡張して, 以下のように, 命題論理式集合のモデルを定義する.

定義 9.14. [命題論理式集合のモデル] Γ を命題論理式の集合とするととき, 任意の $A \in \Gamma$ について, $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$ となる付値 v を Γ のモデルとよぶ.

以下は, 方針で述べた性質 (2):

補題 9.15. Γ を命題論理式の集合とし, A を命題論理式とする. このとき, $\Gamma \not\models A \iff \Gamma \cup \{\neg A\}$ はモデルをもつ.

証明. ($\implies$) 仮定より, ある付値 v が存在して, 任意の $B \in \Gamma$ について $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ だが, $\llbracket A \rrbracket_v = \text{F}$.

このとき, 解釈の定義から, $\llbracket \neg A \rrbracket_v = \text{T}$. よって, v は, $\Gamma \cup \{\neg A\}$ のモデル.

($\impliedby$) 付値 v が, $\Gamma \cup \{\neg A\}$ のモデルであるとする. 定義より, $\llbracket \neg A \rrbracket_v = \text{T}$, および, 任意の $B \in \Gamma$ について $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ が成立する.

後者と仮定 $\Gamma \models A$ より, $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$ となるが, これは, $\llbracket \neg A \rrbracket_v = \text{T}$ に矛盾.

よって, $\Gamma \models A$ でない. つまり, $\Gamma \not\models A$. □

無矛盾性

定義 9.16. [無矛盾性] Γ を命題論理式の集合とする.
 $\Gamma \not\vdash \perp$ であるとき, Γ を無矛盾であるという.

対偶を考えると, 以下が成立することに注意する:

$$\Gamma \text{ が無矛盾でない} \implies \Gamma \vdash \perp$$

さらに, $\perp$ の推論規則を用いることで, 任意の命題論理式 A について,

$$\Gamma \text{ が無矛盾でない} \implies \Gamma \vdash A$$

も成立する.

無矛盾な集合の例:

- $\{P_1, P_2, \dots\}$
- $\{P, P \rightarrow P, P \vee Q\}$

など.

無矛盾でない集合 (= 矛盾する集合) の例:

- $\{\perp\}$
- $\{P, \neg P\}$
- $\{\neg(P \rightarrow P)\}$
- $\{P \rightarrow \perp, Q \rightarrow P, Q\}$

など.

無矛盾集合の性質

以下は，方針で述べた性質 (1):

補題 9.17. Γ を命題論理式の集合とし， A を命題論理式とする．このとき， $\Gamma \not\vdash \neg A \iff \Gamma \cup \{A\}$ が無矛盾．

証明. $(\implies)$ $\Gamma \not\vdash \neg A$ および $\Gamma \cup \{A\} \vdash \perp$ と仮定する．

$\vdash$ の定義より，除去されていない仮定集合が $\Gamma_1 \subseteq \Gamma \cup \{A\}$ ，結論が $\perp$ となるような証明図 $\mathcal{D}$ が存在する．

このとき， $\mathcal{D}$ に $\neg$ の導入規則を適用して， Γ_1 に表われる全ての $[A]$ を除去した証明図 $\mathcal{D}'$ が得られる．

$\mathcal{D}'$ の除去されていない仮定集合は $\Gamma'_1 \subseteq \Gamma$ ，結論は $\neg A$ であるから，これは $\Gamma \not\vdash \neg A$ に矛盾．

($\Leftarrow$) $\Gamma \cup \{A\}$ は無矛盾, $\Gamma \vdash \neg A$ と仮定する.

後者の仮定と $\vdash$ の定義より, 除去されていない仮定の集合が $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, 結論が $\neg A$ となるような証明図 $\mathcal{D}$ が存在する.

このとき,

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \neg A \end{array} \quad [A]}{\perp} \neg E$$

なる証明図を考える.

すると, $\Gamma \cup \{A\} \vdash \perp$ となるが, これは $\Gamma \cup \{A\}$ の無矛盾性に反する. $\square$

極大無矛盾性

最後に、方針で述べた性質 (3) の証明に進もう。まず、この証明に重要な役割を果たす概念である **極大無矛盾集合** を紹介する。

定義 9.18. [極大無矛盾集合] Γ を命題論理式の集合とする Γ が以下の性質を満たすとき、 Γ を **極大無矛盾** であるという:

- (1) Γ が無矛盾,
- (2) 任意の命題論理式の集合 Δ について,
 $\Gamma \subseteq \Delta$ かつ Δ が無矛盾ならば, $\Gamma = \Delta$.

無矛盾な集合のうち、部分集合関係 $\subseteq$ を大小関係ととったときに、極大 (それより大きいものはない) となっているものが、“極大無矛盾集合”ということになる。

補題 9.19. [極大無矛盾集合の性質] Γ が極大無矛盾な命題論理式集合のとき,

- (1) $A \in \Gamma$ あるいは $\neg A \in \Gamma$ のどちらか一方が成立.
- (2) $\Gamma \vdash A \implies A \in \Gamma$
- (3) $\Gamma \vdash A \vee B \implies A \in \Gamma$ または $B \in \Gamma$

証明. (1) $A \in \Gamma$ かつ $\neg A \in \Gamma$ なら, $\neg$ の除去規則より $\Gamma \vdash \perp$ となり, Γ が無矛盾であることに矛盾する.

あと, $A, \neg A \notin \Gamma$ と仮定して, 矛盾を示せばよい.

1. $\Gamma \vdash \neg A$ のとき.

$\Gamma \cup \{\neg A\}$ が無矛盾であることを示す.

$\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \perp$ と仮定する.

除去されていない仮定が $\Gamma_1 \subseteq \Gamma \cup \{\neg A\}$, 結論が $\perp$ となっ

ている，証明図 $\mathcal{D}_1$ が存在する．

$\Gamma \vdash \neg A$ より，除去されていない仮定が $\Gamma_2 \subseteq \Gamma$ ，結論が $\neg A$ となっている，証明図 $\mathcal{D}_2$ が存在する．

$\mathcal{D}_1$ の除去されていない仮定 $[\neg A]$ をすべて $\mathcal{D}_2$ で置きかえた証明図 $\mathcal{D}_3$ を考える．

$\mathcal{D}_3$ より $\Gamma \vdash \perp$ となるが，これは， Γ の無矛盾性に反する．

2. $\Gamma \not\vdash \neg A$ のとき．

このとき，補題 9.17 より， $\Gamma \cup \{A\}$ は無矛盾．

$A, \neg A \notin \Gamma$ より，いずれの場合も， $\Gamma \subsetneq \Sigma$ なる無矛盾な命題論理式の集合 Σ が存在することになる．

これは Γ が極大無矛盾であることに矛盾．

(2) $\Gamma \vdash A \implies A \in \Gamma$

$\Gamma \vdash A$ と仮定する.

$A \notin \Gamma$ とすると, (1)より $\neg A \in \Gamma$.

すると, $\Gamma \vdash \neg A$ でもあるから, $\Gamma \vdash \perp$ となる.

これは Γ が無矛盾であることに矛盾.

(3) $\Gamma \vdash A \vee B \implies A \in \Gamma$ または $B \in \Gamma$

$\Gamma \vdash A \vee B$ と仮定.

$A, B \notin \Gamma$ とすると, **(1)** より, $\neg A, \neg B \in \Gamma$.

すると, $\{\neg A, \neg B\} \vdash \neg(A \vee B)$ の証明図が存在するので,
 $\Gamma \vdash \neg(A \vee B)$.

(2) より, $\neg(A \vee B) \in \Gamma$.

(1) より, $A \vee B \notin \Gamma$.

一方, 仮定 $\Gamma \vdash A \vee B$ と **(2)** より, $A \vee B \in \Gamma$.

これは矛盾.

よって, $A, B \notin \Gamma$ となることはない. つまり, $A \in \Gamma$ または $B \in \Gamma$ が成立する.

補題 9.20. [極大無矛盾集合への拡大] Γ を無矛盾な命題論理式の集合とする. このとき, ある極大無矛盾集合 Δ が存在して, $\Gamma \subseteq \Delta$ が成立する.

証明. $A_0, A_1, \dots$ を命題論理式集合全体の数えあげとする. (なお, 同じ論理式が2度数えられることはないものとする.) $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots$ および Γ^* を次のように定義:

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \Gamma \\ \Gamma_{i+1} &= \begin{cases} \Gamma_i \cup \{A_i\} & (\Gamma_i \not\vdash \neg A_i \text{ のとき}) \\ \Gamma_i & (\Gamma_i \vdash \neg A_i \text{ のとき}) \end{cases} \\ \Gamma^* &= \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i\end{aligned}$$

定義より, $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ は明らか. 従って, あと, Γ^* が極大無矛盾であることを示せば, $\Delta = \Gamma^*$ とおけるので題意が成立する.

1. 任意の $i \geq 0$ について Γ_i は無矛盾.

i に関する 数学的帰納法により示す.

(a) 基本ステップ

$\Gamma_0 = \Gamma$, かつ, Γ は仮定より 無矛盾であるから, 明らかに Γ_0 は無矛盾.

(b) 帰納ステップ

$i = k + 1$ とおく.

$\Gamma_k \vdash \neg A_k$ のとき. このときは, $\Gamma_k = \Gamma_{k+1}$ および帰納法の仮定より Γ_{k+1} は無矛盾.

$\Gamma_k \not\vdash \neg A_k$ のとき. 帰納法の仮定より Γ_k は無矛盾. よって, 補題 9.17 より $\Gamma_k \cup \{A_k\}$ も無矛盾.

以上より, 任意の $i \geq 0$ について Γ_i は無矛盾.

2. Γ^* は無矛盾.

$\Gamma^* \not\vdash \perp$ を示す. このため, $\Gamma^* \vdash \perp$ を仮定して, 矛盾を示す.

定義より, 除去されていない仮定集合が $\Sigma \subseteq \Gamma^*$, 結論が $\perp$ となる証明図 $\mathcal{D}$ が存在する.

Σ は有限集合であるから, $\Sigma = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}\}$ とおける. このとき, 数え上げで重複がないことから, 任意の $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$ について, $A_i \in \Gamma_{i+1}$.

また, 定義から, 任意の i, j について, $i < j$ なら $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$. よって, 添字 $i_1, \dots, i_n$ の最大数を m とおくと, $\Sigma \subseteq \Gamma_{m+1}$ が成立する.

証明図 $\mathcal{D}$ の存在により, $\Gamma_{m+1} \vdash \perp$. これは1.で示した Γ_{m+1} が無矛盾であることに矛盾.

3. Γ^* は極大無矛盾.

Σ を $\Gamma^* \subseteq \Sigma$ なる 命題論理式の集合とする.

$\Gamma^* \subsetneq \Sigma$ とすると, $A_k \in \Sigma \setminus \Gamma^*$ となる 命題論理式 A_k が存在する.

Γ^* の定義より, $A_k \notin \Gamma_{k+1}$. このとき, Γ_{k+1} の定義より $\Gamma_k \vdash \neg A_k$.

すると, $\Gamma_k \subseteq \Gamma^* \subseteq \Sigma$ より, $\Sigma \vdash \neg A_k$.

従って, 除去されていない仮定集合が $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, 結論が $\neg A_k$ となる 証明図 $\mathcal{D}_1$ が存在する.

一方, $A_k \in \Sigma$ であったから, 証明図

$$\frac{\mathcal{D}_1 \quad \neg A_k \quad [A_k]}{\perp} \neg E$$

より, $\Sigma \vdash \perp$.

従って, もし $\Gamma^* \subsetneq \Sigma$ ならば, Σ は無矛盾ではない.

つまり, $\Sigma \supseteq \Gamma^*$ が無矛盾であれば, $\Gamma^* = \Sigma$.

□

極大無矛盾集合を用いて，付値を定義する．（これが方針で述べた性質 (3) の証明で見つけたかったモデルになる．）

補題 9.21. Γ を極大無矛盾な命題論理式の集合とする．付値 v を以下により定義する．

$$v(P_i) = \begin{cases} T & (P_i \in \Gamma \text{ のとき}) \\ F & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

このとき， $\llbracket A \rrbracket_v = T \iff A \in \Gamma$ ．

証明．命題論理式 A の構造に関する 帰納法で示す．

1. A が命題変数のとき 解釈の定義より明らか．

2. $A = \perp$ のとき

解釈の定義より， $\llbracket \perp \rrbracket_v = F$ ．一方， Γ が無矛盾であることより， $\perp \notin \Gamma$ ．よって，成立．

3. $A = \top$ のとき

解釈の定義より, $\llbracket \top \rrbracket_v = \text{T}$. 一方, $\Gamma \vdash \top$ であることから, 補題 9.19 (2) より $\top \in \Gamma$.

4. $A = \neg B$ のとき

解釈の定義より

$$\llbracket A \rrbracket_v = \text{T} \iff \llbracket B \rrbracket_v = \text{F} \iff \llbracket B \rrbracket_v \neq \text{T}.$$

一方, 補題 9.19 (1) より,

$$A \in \Gamma \iff \neg A \notin \Gamma \iff B \notin \Gamma.$$

帰納法の仮定より

$$\llbracket B \rrbracket_v = \text{T} \iff B \in \Gamma$$

よって

$$\llbracket A \rrbracket_v = \text{T} \iff A \in \Gamma$$

5. $A = B \wedge C$ のとき

$(\implies)$ $\llbracket B \wedge C \rrbracket_v = \text{T}$ より $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$.

帰納法の仮定から, $B, C \in \Gamma$.

$\wedge$ の導入規則により, $\Gamma \vdash B \wedge C$.

補題 9.19 (2) より $B \wedge C \in \Gamma$.

$(\impliedby)$ $B \wedge C \in \Gamma$ と仮定

すると, $\Gamma \vdash B \wedge C$.

$\wedge$ の除去規則により, $\Gamma \vdash B$ かつ $\Gamma \vdash C$.

帰納法の仮定から $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$.

解釈の定義から, $\llbracket B \wedge C \rrbracket_v = \text{T}$.

6. $A = B \vee C$ のとき

$(\implies)$ $\llbracket B \vee C \rrbracket_v = \text{T}$ より $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ または $\llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$.

$\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ のとき. ($\llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$ のときも同様.)

帰納法の仮定から, $B \in \Gamma$.

$\vee$ の導入規則により $\Gamma \vdash B \vee C$.

補題 9.19 (2) より $B \vee C \in \Gamma$.

$(\impliedby)$ $B \vee C \in \Gamma$ とする.

補題 9.19 (3) より, $B \in \Gamma$ または $C \in \Gamma$.

帰納法の仮定から, $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ または $\llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$.

解釈の定義から, $\llbracket B \vee C \rrbracket_v = \text{T}$.

7. $A = B \rightarrow C$ のとき

$(\implies)$ $\llbracket B \rightarrow C \rrbracket_v = \text{T}$ より $\llbracket B \rrbracket_v = \text{F}$ または $\llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$.

$\llbracket B \rrbracket_v = \text{F}$ のとき. 帰納法の仮定から, $B \notin \Gamma$.

Γ が極大無矛盾集合であることから, $\{B\} \cup \Gamma \vdash \perp$.

$\perp$ 規則より $\{B\} \cup \Gamma \vdash C$.

$\rightarrow$ の導入規則により, $\Gamma \vdash B \rightarrow C$.

補題 9.19 (2) より $B \rightarrow C \in \Gamma$.

$\llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$ のとき. 帰納法の仮定から, $C \in \Gamma$.

よって, $\Gamma \vdash C$.

$\rightarrow$ の導入規則により, $\Gamma \vdash B \rightarrow C$.

補題 9.19 (2) より $B \rightarrow C \in \Gamma$.

8. $A = B \leftrightarrow C$ のとき

$(\implies)$ $\llbracket B \leftrightarrow C \rrbracket_v = \text{T}$ より $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$ または $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$.

$\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$ のとき. 帰納法の仮定から, $B, C \in \Gamma$.
よって, $\Gamma \vdash B$ かつ $\Gamma \vdash C$.

$\leftrightarrow$ の導入規則により, $\Gamma \vdash B \leftrightarrow C$

$\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$ のとき. 帰納法の仮定から, $B, C \notin \Gamma$.
 Γ が極大無矛盾集合であることから, $\{B\} \cup \Gamma \vdash \perp$ かつ $\{C\} \cup \Gamma \vdash \perp$.

よって, $\perp$ 規則より $\{B\} \cup \Gamma \vdash C$ かつ $\{C\} \cup \Gamma \vdash B$.

$\leftrightarrow$ の導入規則により, $\Gamma \vdash B \leftrightarrow C$.

($\Leftarrow$) $B \leftrightarrow C \in \Gamma$ とする.

$\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ のとき. 帰納法の仮定より, $B \in \Gamma$.

よって, $\leftrightarrow$ の除去規則により, $\Gamma \vdash C$.

したがって, 補題 9.19 (2)より, $C \in \Gamma$.

よって, 帰納法の仮定より, $\llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$.

ゆえに, 解釈の定義より, $\llbracket B \leftrightarrow C \rrbracket_v = \text{T}$.

$\llbracket B \rrbracket_v = \text{F}$ のとき.

$C \in \Gamma$ と仮定する.

このとき, $\leftrightarrow$ の除去規則により, $\Gamma \vdash B$.

すると, 補題 9.19 (2)より $B \in \Gamma$.

一方，帰納法の仮定より， $B \notin \Gamma$ ．これは矛盾．

よって， $C \notin \Gamma$ が成立する．

したがって，帰納法の仮定より， $\llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$ ．

解釈の定義より， $\llbracket B \leftrightarrow C \rrbracket_v = \text{T}$ ．



これで方針で述べた性質 (3) を証明する準備が整った.

系 9.22. 命題論理式の集合 Γ が無矛盾ならば, Γ はモデルをもつ.

証明. Γ が無矛盾とする.

補題 9.20 より, ある極大無矛盾な Δ が存在して $\Gamma \subseteq \Delta$ が成立.

この Δ により, 補題 9.21 にあるように付値 v を定めると
$$\llbracket A \rrbracket_v = \text{T} \iff A \in \Delta$$

$\Gamma \subseteq \Delta$ より, 任意の $A \in \Gamma$ について $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$ が成立.

よって, 付値 v は Γ のモデル.

定理 9.23. [完全性定理] Γ を命題論理式の集合, A を命題論理式とする. このとき, $\Gamma \models A \implies \Gamma \vdash A$.

証明. 対偶を証明.

$\Gamma \not\models A$ とする.

補題 9.17 より, $\Gamma \cup \{\neg A\}$ は無矛盾.

系 9.22 より, $\Gamma \cup \{\neg A\}$ はモデルを持つ.

よって, 補題 9.15 より, $\Gamma \not\models A$.

□

モデルの存在と無矛盾性

性質 (3) では，無矛盾な集合がモデルを持つことを述べた．この性質は逆も成り立つ．つまり，命題論理式の集合が無矛盾であることと，それがモデルを持つことは同値：

定理 9.24. Γ を命題論理式の集合とする． Γ がモデルを持つ $\iff \Gamma$ が無矛盾．

証明. ($\implies$) 系9.22より.

($\impliedby$) 対偶を示す.

$\Gamma \vdash \perp$ と仮定する.

よって, ある命題論理式 $A_1, \dots, A_n \in \Gamma$ が存在して, $\vdash \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$.

健全性定理より, $\models \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$.

よって, 任意の付値 v について, $\llbracket \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rrbracket_v = \text{T}$,
つまり, $\llbracket A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rrbracket_v = \text{F}$ となる.

従って, $i = 1, \dots, n$ のすべてについて, $\llbracket A_i \rrbracket_v = \text{T}$ となる
ような付値 v は存在しない.

$\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \Gamma$ より, すべての $A \in \Gamma$ について, $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$ となるような付値 v は存在しない.

よって, Γ はモデルを持たない. □

コンパクト性

完全性定理から得られる性質の1つにコンパクト性がある。

定理 9.25. [コンパクト性定理] Γ を命題論理式の集合とする。このとき、 Γ がモデルを持つ $\iff$ Γ の任意の有限部分集合がモデルを持つ。

証明. ($\implies$) 明らか. ($\impliedby$) 対偶を証明する. Γ がモデルを持たないとする. 定理 9.24より, Γ は矛盾する. よって, $\Gamma \vdash \perp$. よって, $\perp$ を結論とし, この証明図に表われる仮定 Δ が $\Delta \subseteq \Gamma$ であるような証明図が存在する. このとき, $\Delta \vdash \perp$ かつ Δ は有限. Δ は矛盾するから, 定理 9.24より Δ はモデルを持たない. $\square$

まとめ

- 健全性と完全性

健全性: 証明可能 $\Rightarrow$ トートロジー

完全性: トートロジー $\Rightarrow$ 証明可能

- 健全性

証明図に関する帰納法により証明

- 数え上げ, 可算性/非可算性

命題論理式集合の数え上げ

$\mathbb{R}$ の非可算性, カントールの対角線論法

- 完全性

極大無矛盾集合

モデルの構成