

## 2021 年度 数理論理学 復習問題 (13)

### 問題 1

次の証明図に現われる  $\forall I$  の推論規則の適用について、正しいか否か答えよ。また、正しくない場合には、その理由を次の形で述べよ。「除去されていない仮定... に変数... が自由に出現するため」。

$$(1) \quad (2)$$

$$\frac{\frac{\frac{[P(x)]^1 \quad [Q(y)]}{P(x) \wedge Q(y)} \wedge I}{P(x) \rightarrow P(x) \wedge Q(y)} \rightarrow I^1}{\forall y (P(x) \rightarrow P(x) \wedge Q(y))} \forall I \quad (1)$$

$$\frac{\frac{[P(x)]^1 \quad [Q(y)]}{P(x) \wedge Q(y)} \wedge I}{\frac{\forall x (P(x) \wedge Q(y))}{P(x) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(y))} \rightarrow I^1} \forall I \quad (2)$$

### 問題 2 以下の述語論理式の証明図を書け。

- (1)  $\forall x ((P \rightarrow Q(x)) \wedge P \rightarrow Q(x))$
- (2)  $\forall x P(x) \rightarrow P(a) \wedge P(b)$
- (3)  $\forall x (P \rightarrow Q(x)) \rightarrow P \rightarrow \forall y Q(y)$
- (4)  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall y P(y) \rightarrow \forall z Q(z)$

問題 3 以下の証明図について、正しくない推論を指摘するとともに正しい証明図に直せ。ただし、証明図の結論を変えてはいけない。

$$(1) \quad (2)$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{[\forall x \forall y P(x, y)]^1}{\forall y P(y, y)} \forall E}{\frac{\frac{P(y, y)}{\forall y P(y, y)} \forall E}{\frac{\forall y P(y, y)}{\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y P(y, y)}} \rightarrow I^1}}{\frac{\frac{[\forall x \forall y P(x, y)]^1}{\forall y P(x, y)} \forall E}{\frac{\frac{P(y, z)}{\forall z P(y, z)} \forall I}{\frac{\frac{\forall z P(y, z)}{\forall y \forall z P(y, z)} \forall I}{\frac{\forall y \forall z P(y, z)}{\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \forall z P(y, z)}}} \rightarrow I^1}}$$

### 問題 4 以下の述語論理式の証明図を書け。

- (1)  $\forall x P(x) \rightarrow \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y))$
- (2)  $\forall x \forall y \forall z P(x, y, z) \rightarrow \forall x \forall y P(x, y, x)$
- (3)  $\forall x P(x) \rightarrow \forall x \forall y P(f(x, y))$
- (4)  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow P(a) \vee P(b) \rightarrow Q(a) \vee Q(b)$

# 2021 年度 数理論理学 復習問題解答 (13)

## 問題 1

- (1) 正しくない. 除去されていない仮定  $[Q(y)]$  に変数  $y$  が自由に出現するため.  
(2) 正しくない. 除去されていない仮定  $[P(x)]$  に変数  $x$  が自由に出現するため. (仮定  $[P(x)]$  は最終的には除去されているが,  $\forall I$  を適用する時点では除去されていないことに注意. )

## 問題 2

(1)

$$\frac{\frac{[(P \rightarrow Q(x)) \wedge P]^1}{P \rightarrow Q(x)} \wedge E \quad \frac{[(P \rightarrow Q(x)) \wedge P]^1}{P} \wedge E}{\frac{Q(x)}{(P \rightarrow Q(x)) \wedge P \rightarrow Q(x)} \rightarrow I^1} \forall I$$

(2)

$$\frac{\frac{[\forall x P(x)]^1}{P(a)} \forall E \quad \frac{[\forall x P(x)]^1}{P(b)} \forall E}{\frac{P(a) \wedge P(b)}{\forall x P(x) \rightarrow P(a) \wedge P(b)} \rightarrow I^1}$$

(3)

$$\frac{\frac{[\forall x (P \rightarrow Q(x))]^2}{P \rightarrow Q(y)} \forall E \quad [P]^1}{\frac{Q(y)}{\frac{\forall y Q(y)}{P \rightarrow \forall y Q(y)}} \rightarrow E} \forall I$$

$$\frac{P \rightarrow \forall y Q(y)}{\forall x (P \rightarrow Q(x)) \rightarrow P \rightarrow \forall y Q(y)} \rightarrow I^2$$

(4)

$$\frac{\frac{[\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall y P(y)]^1}{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \forall E \quad [\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall y P(y)]^1}{\frac{\forall y P(y)}{P(z) \rightarrow Q(z)} \forall E \quad \frac{\forall y P(y)}{P(z)} \forall E}{\frac{Q(z)}{\frac{\forall z Q(z)}{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall y P(y) \rightarrow \forall z Q(z)}} \forall I}}{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall y P(y) \rightarrow \forall z Q(z)} \rightarrow I^1$$

## 問題 3

- (1) 正しくないのは 1 番上の  $\forall E$  の推論. 正しい証明図は,

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x \forall y P(x, y)]^1}{\forall w P(y, w)} \forall E}{\frac{P(y, y)}{\frac{\forall y P(y, y)}{\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y P(y, y)}} \forall I}}{\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y P(y, y)} \rightarrow I^1$$

変数  $w$  は ( $y$  以外の) 他の変数でもよい.

(2) 正しくないのは上から 2 番目  $\forall E$  の推論. 正しい証明図は,

$$\frac{\frac{\frac{\frac{[\forall x \forall y P(x, y)]^1}{\forall w P(y, w)} \forall E}{P(y, z)} \forall E}{\frac{\forall z P(y, z)}{\forall y \forall z P(y, z)} \forall I}{\forall y \forall z P(y, z)} \forall I}{\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \forall z P(y, z)} \rightarrow I^1$$

変数  $w$  は ( $y$  以外の) 他の変数でもよい.

#### 問題 4

(1)

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x P(x)]^1}{P(x)} \forall E \quad [\forall x P(x)]^1}{\frac{P(x) \wedge P(y)}{\forall y (P(x) \wedge P(y))} \wedge I}{\forall y (P(x) \wedge P(y)) \forall I}{\forall x P(x) \rightarrow \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y))} \rightarrow I^1}{\forall x P(x) \rightarrow \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y))} \rightarrow I^1$$

(2)

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x \forall y \forall z P(x, y, z)]^1}{\forall y \forall z P(x, y, z)} \forall E}{\frac{\forall z P(x, y, z)}{\frac{P(x, y, x)}{\frac{\forall y P(x, y, x)}{\forall x \forall y P(x, y, x)}} \forall I}{\forall x \forall y P(x, y, x)} \forall I}{\forall x \forall y \forall z P(x, y, z) \rightarrow \forall x \forall y P(x, y, x)} \rightarrow I^1}{\forall x \forall y \forall z P(x, y, z) \rightarrow \forall x \forall y P(x, y, x)} \rightarrow I^1$$

(3)

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x P(x)]^1}{P(f(x, y))} \forall E}{\frac{\forall y P(f(x, y))}{\frac{\forall x \forall y P(f(x, y))}{\forall x P(x) \rightarrow \forall x \forall y P(f(x, y))}} \forall I}{\forall x P(x) \rightarrow \forall x \forall y P(f(x, y))} \rightarrow I^1}{\forall x P(x) \rightarrow \forall x \forall y P(f(x, y))} \rightarrow I^1$$

(4)

$$\frac{\frac{\frac{\frac{[\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))] \quad [\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))]}{P(a) \rightarrow Q(a) \quad [P(a)]} \frac{Q(a)}{\overline{Q(a) \vee Q(b)}}}{\overline{Q(a) \vee Q(b)}} \frac{[\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))] \quad [\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))]}{P(b) \rightarrow Q(b) \quad [P(b)]} \frac{Q(b)}{\overline{Q(a) \vee Q(b)}}}{\overline{Q(a) \vee Q(b)}} \frac{P(a) \vee P(b) \rightarrow Q(a) \vee Q(b)}{\overline{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow P(a) \vee P(b) \rightarrow Q(a) \vee Q(b)}}$$