

2021 年度 数理論理学 復習問題 (5)

問題 1 空いているところを補って，以下の証明図を完成させよ．

(1)

$$\frac{\frac{[\quad]^3 \quad \frac{[Q]^2}{\quad} \rightarrow I^1}{\frac{R}{Q \rightarrow R} \rightarrow I^2}}{((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow Q \rightarrow R} \rightarrow I^3$$

(2)

$$\frac{\frac{[\quad] \quad [\quad]}{Q \wedge R} \rightarrow E \quad \frac{[\quad] \quad [\quad]}{Q \wedge R} \rightarrow E}{\frac{\overline{P \rightarrow R \wedge Q} \rightarrow I^1}{(P \rightarrow Q \wedge R) \rightarrow P \rightarrow R \wedge Q} \rightarrow I^2}$$

(3)

$$\frac{\frac{[\quad]^2}{\overline{P}} \wedge E \quad \frac{[\quad]^2}{\overline{Q \rightarrow R}} \wedge E}{\overline{(P \wedge Q) \wedge R \rightarrow P \wedge (Q \rightarrow R)}} \wedge I \rightarrow I^2$$

問題 2 以下の命題論理式の証明図を書け．

- (1) $(P \rightarrow P \rightarrow Q) \rightarrow R \rightarrow P \rightarrow Q$
- (2) $R \rightarrow P \wedge Q \rightarrow Q \wedge (R \wedge P)$
- (3) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow P \rightarrow R$

問題 3 以下の命題論理式の証明図を書け．

- (1) $(P \rightarrow \perp) \rightarrow \neg(P \wedge Q)$
- (2) $P \wedge \neg Q \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$
- (3) $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P$

問題 4 以下の命題論理式の証明図を書け．

$$(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \rightarrow (P \leftrightarrow R)$$

2021 年度 数理論理学 復習問題解答 (5)

問題 1

(1)

$$\frac{\frac{[(P \rightarrow Q) \rightarrow R]^3 \quad [Q]^2}{P \rightarrow Q} \rightarrow I^1}{\frac{R}{Q \rightarrow R} \rightarrow I^2} \rightarrow E \\ \frac{}{(P \rightarrow Q) \rightarrow R \rightarrow (Q \rightarrow R)} \rightarrow I^3$$

(2)

$$\frac{\frac{[P \rightarrow (Q \wedge R)]^2 \quad [P]^1}{Q \wedge R} \rightarrow E}{\frac{R}{R} \wedge E} \wedge E \quad \frac{[P \rightarrow (Q \wedge R)]^2 \quad [P]^1}{Q \wedge R} \rightarrow E \\ \frac{}{Q} \wedge I \\ \frac{R \wedge Q}{P \rightarrow (R \wedge Q)} \rightarrow I^1 \\ \frac{}{(P \rightarrow (Q \wedge R)) \rightarrow (P \rightarrow (R \wedge Q))} \rightarrow I^2$$

(3)

$$\frac{\frac{[(P \wedge Q) \wedge R]^2}{P \wedge Q} \wedge E}{\frac{P}{P} \wedge E} \wedge E \quad \frac{[(P \wedge Q) \wedge R]^2}{R} \wedge E \\ \frac{}{Q \rightarrow R} \rightarrow I^1 \\ \frac{}{P \wedge (Q \rightarrow R)} \wedge I \\ \frac{}{((P \wedge Q) \wedge R) \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow R))} \rightarrow I^2$$

問題 2

(1)

$$\frac{[P \rightarrow P \rightarrow Q]^3 \quad [P]^1}{P \rightarrow Q} \rightarrow E \quad [P]^1 \rightarrow E \\ \frac{Q}{P \rightarrow Q} \rightarrow I^1 \\ \frac{}{R \rightarrow P \rightarrow Q} \rightarrow I^2 \\ \frac{}{(P \rightarrow P \rightarrow Q) \rightarrow R \rightarrow P \rightarrow Q} \rightarrow I^3$$

(2)

$$\frac{[P \wedge Q]^1}{Q} \wedge E \quad \frac{[R]^2 \quad [P \wedge Q]^1}{P} \wedge E \\ \frac{}{R \wedge P} \wedge I \\ \frac{}{Q \wedge (R \wedge P)} \wedge I \\ \frac{}{P \wedge Q \rightarrow Q \wedge (R \wedge P)} \rightarrow I^1 \\ \frac{}{R \rightarrow P \wedge Q \rightarrow Q \wedge (R \wedge P)} \rightarrow I^2$$

(3)

$$\frac{[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)]^2}{Q \rightarrow R} \wedge E \quad \frac{[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)]^2}{P \rightarrow Q} \wedge E \quad [P]^1 \rightarrow E \\ \frac{}{Q} \rightarrow E \\ \frac{R}{P \rightarrow R} \rightarrow I^1 \\ \frac{}{(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow P \rightarrow R} \rightarrow I^2$$

問題 3

(1)

$$\frac{[P \rightarrow \perp]^2 \quad [P \wedge Q]^1}{P} \wedge E \\ \frac{}{\perp} \rightarrow E \\ \frac{}{\neg(P \wedge Q)} \neg I^1 \\ \frac{}{(P \rightarrow \perp) \rightarrow \neg(P \wedge Q)} \rightarrow I^2$$

(2)

$$\frac{[P \wedge \neg Q]^2}{\neg Q} \wedge E \quad \frac{[P \rightarrow Q]^1 \quad [P \wedge \neg Q]^2}{P} \wedge E \\ \frac{}{Q} \rightarrow E \\ \frac{}{\perp} \rightarrow E \\ \frac{}{\neg(P \rightarrow Q)} \neg I^1 \\ \frac{}{P \wedge \neg Q \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)} \rightarrow I^2$$

(3)

$$\begin{array}{c}
 \frac{[(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)]^2}{P \rightarrow \neg Q} \wedge E \quad [P]^1 \rightarrow E \quad \frac{[(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)]^2}{P \rightarrow Q} \wedge E \quad [P]^1 \rightarrow E \\
 \hline
 \frac{\neg Q \quad Q}{\perp} \neg E \\
 \hline
 \frac{\perp}{\neg P} \neg I^1 \\
 \hline
 \frac{}{(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P} \rightarrow I^2
 \end{array}$$

問題 4

$$\begin{array}{c}
 \frac{[(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)]^2}{Q \leftrightarrow R} \wedge E \quad \frac{P \leftrightarrow Q}{Q} \leftrightarrow E \quad [P]^1 \leftrightarrow E \quad \frac{[(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)]^2}{P \leftrightarrow Q} \wedge E \quad \frac{Q \leftrightarrow R}{Q} \leftrightarrow E \quad [R]^1 \leftrightarrow E \\
 \hline
 \frac{R \quad P \leftrightarrow R}{P} \leftrightarrow I^1 \\
 \hline
 \frac{}{(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \rightarrow (P \leftrightarrow R)} \rightarrow I^2
 \end{array}$$