

## 2021 年度 数理論理学 復習問題 (8)

問題 1 任意の命題論理式  $A$  について,  $d(A) \geq 0$  となることを帰納法を用いて証明せよ. ただし,  $d(A)$  は, 講義資料中で与えたように, 命題論理式  $A$  の深さを表わすものとする.

問題 2 命題変数/定数の個数  $l(A)$  を以下のように定義する.

$$l(A) = \begin{cases} 1 & (A \text{ が命題変数, または } A \in \{\top, \perp\} \text{ のとき}) \\ l(B) & (A = \neg B \text{ のとき}) \\ l(B) + l(C) & (A = B \wedge C, \text{ または } A = B \vee C, A = B \rightarrow C, \\ & A = B \leftrightarrow C \text{ のとき}) \end{cases}$$

また, 2 項命題結合子の個数  $b(A)$  を以下のように定義する.

$$b(A) = \begin{cases} 0 & (A \text{ が命題変数, または } A \in \{\top, \perp\} \text{ のとき}) \\ b(B) & (A = \neg B \text{ のとき}) \\ b(B) + b(C) + 1 & (A = B \wedge C, \text{ または } A = B \vee C, A = B \rightarrow C, \\ & A = B \leftrightarrow C \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の命題論理式  $A$  について,  $l(A) = b(A) + 1$  が成立することを示せ.

問題 3 命題論理式の変換  $t$  を以下のように定義する.

$$\begin{array}{ll} t(P) &= \neg P & t(B \wedge C) &= t(B) \vee t(C) \\ t(\perp) &= \top & t(B \vee C) &= t(B) \wedge t(C) \\ t(\top) &= \perp & t(B \rightarrow C) &= t(C) \rightarrow t(B) \\ t(\neg B) &= \neg t(B) & t(B \leftrightarrow C) &= t(B) \leftrightarrow t(C) \end{array}$$

ただし, ここで,  $P$  は命題変数を表わすとする. このとき,

(1)  $t(P \wedge Q), t(t(P \wedge Q))$  を求めよ.

(2) 任意の命題論理式  $A$  について  $t(t(A)) \cong A$  となることを, 命題論理式  $A$  に関する帰納法を用いて証明せよ.

問題 4  $|\text{Sub}(A)| \leq 2c(A) + 1$ , つまり, 命題論理式  $A$  の部分論理式の個数は高々  $2c(A) + 1$  個となることを示せ.

問題 5  $v$  を付値とすると, 命題論理式の変換  $t_v$  を以下のように定義する.

$$t_v(A) = \begin{cases} \top & (A \text{ が命題変数, } v(A) = \top \text{ のとき}) \\ \perp & (A \text{ が命題変数, } v(A) = \text{F のとき}) \\ A & (A \in \{\perp, \top\} \text{ のとき}) \\ \neg t_v(B) & (A = \neg B \text{ のとき}) \\ t_v(B) \circ t_v(C) & (A = B \circ C, \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) 付値  $v_0$  を

$$v_0(P_i) = \begin{cases} \top & (i \text{ が偶数のとき}) \\ \text{F} & (i \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

により定義する. このとき,  $t_{v_0}((\neg P_0) \rightarrow P_1)$  を求めよ.

(2) 任意の命題論理式  $A$  について,  $\llbracket A \rrbracket_v = \top$  ならば  $t_v(A) \cong \top$ ,  $\llbracket A \rrbracket_v = \text{F}$  ならば  $t_v(A) \cong \perp$  となることを命題論理式  $A$  に関する帰納法を用いて証明せよ.

## 2021 年度 数理論理学 復習問題解答 (8)

問題 1 命題論理式  $A$  に関する帰納法で示す .

1.  $A$  が命題変数のとき .

$d(A)$  の定義から ,  $d(A) = 0$  . よって ,  $d(A) \geq 0$  .

2.  $A = \top$  または  $A = \perp$  のとき .

$d(A)$  の定義から ,  $d(A) = 0$  . よって ,  $d(A) \geq 0$  .

3.  $A = \neg B$  のとき .

$d(A)$  の定義から ,  $d(A) = d(B) + 1$  .

帰納法の仮定より ,  $d(B) \geq 0$  .

よって ,  $d(A) \geq 0$  .

4.  $A = B \wedge C$  または  $A = B \vee C$  ,  $A = B \rightarrow C$  ,  $A = B \leftrightarrow C$  のとき .

$d(A)$  の定義から ,  $d(A) = \max\{d(B), d(C)\} + 1$  .

帰納法の仮定より ,  $d(B) \geq 0$  .

よって ,  $d(A) \geq 0$  .

□

問題 2 命題論理式  $A$  に関する帰納法で示す .

1.  $A$  が命題変数 , または ,  $A = \top$  ,  $A = \perp$  のとき .

定義から ,  $l(A) = 1$  ,  $b(A) = 0$  . よって ,  $l(A) = 1 = b(A) + 1$  .

2.  $A = \neg B$  のとき .

$l(A)$  の定義から ,  $l(A) = l(B)$  .

$b(A)$  の定義から ,  $b(A) = b(B)$  .

帰納法の仮定より ,  $l(B) = b(B) + 1$  .

よって ,  $l(A) = b(A) + 1$  .

4.  $A = B \wedge C$  または  $A = B \vee C$  ,  $A = B \rightarrow C$  ,  $A = B \leftrightarrow C$  のとき .

$l(A)$  の定義から ,  $l(A) = l(B) + l(C)$  .

$b(A)$  の定義から ,  $b(A) = b(B) + b(C) + 1$  .

帰納法の仮定より ,  $l(B) = b(B) + 1$  ,  $l(C) = b(C) + 1$  .

よって ,  $l(A) = l(B) + l(C) = (b(B) + 1) + (b(C) + 1) = (b(B) + b(C) + 1) + 1 = b(A) + 1$  .

□

問題 3 (1)  $t((P \wedge Q)) = t(P) \vee t(Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$

$t(t((P \wedge Q))) = t((\neg P) \vee (\neg Q)) = t(\neg P) \wedge t(\neg Q) = \neg(\neg P) \wedge \neg(\neg Q)$

(2) 命題論理式  $A$  に関する帰納法で示す .

1.  $A$  が命題変数の場合 .

$t(t(A)) = \neg\neg A \cong A$  より成立 .

2.  $A = \perp$  の場合 .

$t(t(A)) = t(\top) \cong \perp \cong A$  より成立 .

3.  $A = \top$  の場合 .

$t(t(A)) = t(\perp) \cong \top \cong A$  より成立 .

4.  $A = \neg B$  の場合 .

帰納法の仮定から ,  $t(t(B)) \cong B$  .

よって,  $t(t(A)) = t(t(\neg B)) = t(\neg t(B)) = \neg t(B) \cong \neg B = A$ .

5.  $A = B \wedge C$  の場合 .

帰納法の仮定から,  $t(t(B)) \cong B$ ,  $t(t(C)) \cong C$ .

よって,  $t(t(A)) = t(t(B) \wedge t(C)) = t(t(B)) \wedge t(t(C)) \cong B \wedge C = A$  より成立 .

6.  $A = B \vee C$  の場合 .

帰納法の仮定から,  $t(t(B)) \cong B$ ,  $t(t(C)) \cong C$ .

よって,  $t(t(A)) = t(t(B) \vee t(C)) = t(t(B)) \vee t(t(C)) \cong B \vee C = A$  より成立 .

7.  $A = B \rightarrow C$  の場合 .

帰納法の仮定から,  $t(t(B)) \cong B$ ,  $t(t(C)) \cong C$ .

よって,  $t(t(A)) = t(t(B) \rightarrow t(C)) = t(t(B)) \rightarrow t(t(C)) \cong B \rightarrow C = A$  より成立 .

8.  $A = B \leftrightarrow C$  の場合 .

帰納法の仮定から,  $t(t(B)) \cong B$ ,  $t(t(C)) \cong C$ .

よって,  $t(t(A)) = t(t(B) \leftrightarrow t(C)) = t(t(B)) \leftrightarrow t(t(C)) \cong B \leftrightarrow C = A$  より成立 .

□

問題 4 命題論理式  $A$  に関する帰納法により証明を行う . 以下では  $A$  の部分論理式の個数を  $s(A)$  とおく .

1.  $A$  が命題変数のとき .

このとき  $\text{Sub}(A) = \{A\}$  より  $s(A) = 1$ . 一方,  $c(A) = 0$  より,  $2c(A) + 1 = 1$ . ゆえに,  $s(A) \leq 2c(A) + 1$ .

2.  $A = \top$  または  $A = \perp$  のとき .

このとき  $\text{Sub}(A) = \{A\}$  より  $s(A) = 1$ . 一方,  $c(A) = 1$  より,  $2c(A) + 1 = 3$ . ゆえに,  $s(A) \leq 2c(A) + 1$ .

3.  $A = \neg B$  のとき .

このとき  $\text{Sub}(A) = \text{Sub}(B) \cup \{A\}$ . よって,  $s(A) \leq s(B) + 1$ . 帰納法の仮定より  $s(B) \leq 2c(B) + 1$ . ゆえに,  $s(A) \leq s(B) + 1 \leq 2c(B) + 2 = 2(c(B) + 1) = 2c(A) \leq 2c(A) + 1$ .

4.  $A = B \wedge C$ , または,  $A = B \vee C$ ,  $A = B \rightarrow C$ ,  $A = B \leftrightarrow C$  のとき .

このとき  $\text{Sub}(A) = \text{Sub}(B) \cup \text{Sub}(C) \cup \{A\}$ . よって,  $s(A) \leq s(B) + s(C) + 1$ . 帰納法の仮定より  $s(B) \leq 2c(B) + 1$ ,  $s(C) \leq 2c(C) + 1$ .  $s(A) \leq s(B) + s(C) + 1 \leq (2c(B) + 1) + (2c(C) + 1) + 1 \leq 2(c(B) + c(C) + 1) + 1 \leq 2c(A) + 1$ . □

問題 5 (1)

$$\begin{aligned} t_{v_0}((\neg P_0) \rightarrow P_1) &= t_{v_0}(\neg P_0) \rightarrow t_{v_0}(P_1) \\ &= \neg(t_{v_0}(P_0)) \rightarrow t_{v_0}(P_1) \\ &= \neg \top \rightarrow \perp \end{aligned}$$

(2) (i)  $\llbracket A \rrbracket_v = \top$  ならば  $t_v(A) \cong \top$ , (ii)  $\llbracket A \rrbracket_v = \text{F}$  ならば  $t_v(A) \cong \perp$  となることを命題論理式  $A$  に関する帰納法を用いて示す .

1.  $A$  が命題変数の場合 . (i)  $\llbracket A \rrbracket_v = \top$  と仮定する . すると, 解釈の定義より  $v(A) = \top$ . よって,  $t_v$  の定義より,  $t_v(A) = \top$ . 従って,  $t_v(A) \cong \top$  が成立する . (ii)  $\llbracket A \rrbracket_v = \text{F}$  と仮定する . すると, 解釈の定義より  $v(A) = \text{F}$ . よって,  $t_v$  の定義より,  $t_v(A) = \perp$ . 従って,  $t_v(A) \cong \perp$  が成立する .

2.  $A = \top$  の場合 .  $t_v$  の定義より ,  $t_v(A) = \top$  . よって ,  $t_v(A) \cong \top$  なので , (i) が成立 . 一方 ,  $\llbracket \top \rrbracket_v = \top$  より , (ii) の前提部分は成立しないので , (ii) も成立する .
3.  $A = \perp$  の場合 .  $t_v$  の定義より ,  $t_v(A) = \perp$  . よって ,  $t_v(A) \cong \perp$  なので , (ii) が成立 . 一方 ,  $\llbracket \perp \rrbracket_v = \text{F}$  より , (i) の前提部分は成立しないので , (i) も成立する .
4.  $A = \neg B$  の場合 . (i)  $\llbracket \neg B \rrbracket_v = \top$  と仮定する . このとき , 解釈の定義より  $\llbracket B \rrbracket_v = \text{F}$  . ゆえに , 帰納法の仮定より ,  $t_v(B) \cong \perp$  . 従って ,  $t_v(\neg B) = \neg t_v(B) \cong \neg \perp \cong \top$  . (ii)  $\llbracket \neg B \rrbracket_v = \text{F}$  と仮定する . このとき , 解釈の定義より  $\llbracket B \rrbracket_v = \top$  . ゆえに , 帰納法の仮定より ,  $t_v(B) \cong \top$  . 従って ,  $t_v(\neg B) = \neg t_v(B) \cong \neg \top \cong \perp$  .
5.  $A = B \wedge C$  の場合 . (i)  $\llbracket B \wedge C \rrbracket_v = \top$  と仮定する . このとき , 解釈の定義より  $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \top$  . ゆえに , 帰納法の仮定より ,  $t_v(B) \cong \top$  かつ  $t_v(C) \cong \top$  . 従って ,  $t_v(B \wedge C) = t_v(B) \wedge t_v(C) \cong \top \wedge \top \cong \top$  . (ii)  $\llbracket B \wedge C \rrbracket_v = \text{F}$  と仮定する . このとき , 解釈の定義より  $\llbracket B \rrbracket_v = \text{F}$  または  $\llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$  .  $\llbracket B \rrbracket_v = \text{F}$  の場合は , 帰納法の仮定より  $t_v(B) \cong \perp$  となり ,  $t_v(B \wedge C) = t_v(B) \wedge t_v(C) \cong \perp \wedge t_v(C) \cong \perp$  .  $\llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$  の場合も , 帰納法の仮定より  $t_v(C) \cong \perp$  となり ,  $t_v(B \wedge C) = t_v(B) \wedge t_v(C) \cong t_v(B) \wedge \perp \cong \perp$  となる .
6.  $A = B \vee C$  の場合 . (i)  $\llbracket B \vee C \rrbracket_v = \top$  と仮定する . このとき , 解釈の定義より  $\llbracket B \rrbracket_v = \top$  または  $\llbracket C \rrbracket_v = \top$  .  $\llbracket B \rrbracket_v = \top$  の場合は , 帰納法の仮定より  $t_v(B) \cong \top$  となり ,  $t_v(B \vee C) = t_v(B) \vee t_v(C) \cong \top \vee t_v(C) \cong \top$  .  $\llbracket C \rrbracket_v = \top$  の場合も , 帰納法の仮定より  $t_v(C) \cong \top$  となり ,  $t_v(B \vee C) = t_v(B) \vee t_v(C) \cong t_v(B) \vee \top \cong \top$  となる . (ii)  $\llbracket B \vee C \rrbracket_v = \text{F}$  と仮定する . このとき , 解釈の定義より  $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$  . ゆえに , 帰納法の仮定より ,  $t_v(B) \cong \perp$  かつ  $t_v(C) \cong \perp$  . 従って ,  $t_v(B \vee C) = t_v(B) \vee t_v(C) \cong \perp \vee \perp \cong \perp$  .
7.  $A = B \rightarrow C$  の場合 . (i)  $\llbracket B \rightarrow C \rrbracket_v = \top$  と仮定する . このとき , 解釈の定義より  $\llbracket B \rrbracket_v = \text{F}$  または  $\llbracket C \rrbracket_v = \top$  .  $\llbracket B \rrbracket_v = \text{F}$  の場合は , 帰納法の仮定より  $t_v(B) \cong \perp$  となり ,  $t_v(B \rightarrow C) = t_v(B) \rightarrow t_v(C) \cong \perp \rightarrow t_v(C) \cong \top$  .  $\llbracket C \rrbracket_v = \top$  の場合も , 帰納法の仮定より  $t_v(C) \cong \top$  となり ,  $t_v(B \rightarrow C) = t_v(B) \rightarrow t_v(C) \cong t_v(B) \rightarrow \top \cong \top$  となる . (ii)  $\llbracket B \rightarrow C \rrbracket_v = \text{F}$  と仮定する . このとき , 解釈の定義より  $\llbracket B \rrbracket_v = \top$  かつ  $\llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$  . ゆえに , 帰納法の仮定より ,  $t_v(B) \cong \top$  かつ  $t_v(C) \cong \perp$  . 従って ,  $t_v(B \rightarrow C) = t_v(B) \rightarrow t_v(C) \cong \top \rightarrow \perp \cong \perp$  .
8.  $A = B \leftrightarrow C$  の場合 . (i)  $\llbracket B \leftrightarrow C \rrbracket_v = \top$  と仮定する . このとき , 解釈の定義より  $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \top$  または  $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$  .  $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \top$  の場合は , 帰納法の仮定より ,  $t_v(B) \cong \top$  ,  $t_v(C) \cong \top$  となり ,  $t_v(B \leftrightarrow C) = t_v(B) \leftrightarrow t_v(C) \cong \top \leftrightarrow \top \cong \top$  .  $\llbracket B \rrbracket_v = \llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$  の場合も , 帰納法の仮定より ,  $t_v(B) \cong \perp$  ,  $t_v(C) \cong \perp$  となり ,  $t_v(B \leftrightarrow C) = t_v(B) \leftrightarrow t_v(C) \cong \perp \leftrightarrow \perp \cong \top$  . (ii)  $\llbracket B \leftrightarrow C \rrbracket_v = \text{F}$  と仮定する . このとき , 解釈の定義より (a)  $\llbracket B \rrbracket_v = \top$  かつ  $\llbracket C \rrbracket_v = \text{F}$  , または , (b)  $\llbracket B \rrbracket_v = \text{F}$  かつ  $\llbracket C \rrbracket_v = \top$  . (a) の場合 , 帰納法の

仮定より,  $t_v(B) \cong \top$ ,  $t_v(C) \cong \perp$  となり,  $t_v(B \leftrightarrow C) = t_v(B) \leftrightarrow t_v(C) \cong \top \leftrightarrow \perp \cong \perp$ . (b) の場合も, 帰納法の仮定より,  $t_v(B) \cong \perp$ ,  $t_v(C) \cong \top$  となるから,  $t_v(B \leftrightarrow C) = t_v(B) \leftrightarrow t_v(C) \cong \perp \leftrightarrow \top \cong \perp$ .  $\square$

注意. 2つの性質 (i) と (ii) を別々に帰納法で示そうとすると, 帰納法の仮定だけでは命題が導けないので, うまくいかない. (このような状況をさして, 「帰納法がかからない」という.)

このように複数の性質を同時に示すことや, もともと証明したい命題より一般的な命題を示すことが, 帰納法による証明がうまくいく鍵となる場合がよくある.