

2021 年度 数理論理学 復習問題 (9)

問題 1 健全性の証明における補題 9.5 にて，最後に用いられた推論規則が $\vee$ の導入規則の場合の証明を示せ．

問題 2 健全性の証明における補題 9.5 にて，最後に用いられた推論規則が $\vee$ の除去規則の場合の証明を示せ．

2021 年度 数理論理学 復習問題解答 (9)

問題 1

- 最後に用いられた推論規則が $\vee$ の導入規則の場合.

このとき, 証明図

$$\frac{\mathcal{D}_1}{C}$$

が存在して, $A = C \vee D$ かつ

$$D = \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{C}}{C \vee D} \vee I$$

となっているか, あるいは,

$$\frac{\mathcal{D}_1}{D}$$

が存在して, $A = C \vee D$ かつ

$$D = \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{D}}{C \vee D} \vee I$$

となっている.

前者の場合を考える. (後者の場合についても同様.) $\mathcal{D}_1$ の除去されていない仮定の集合は, D の除去されていない仮定の集合と等しいので, Γ と等しい. また, 帰納法の仮定から, $\Gamma \models C$. 今, 付値 v が, 任意の $B \in \Gamma$ について $\llbracket B \rrbracket_v = T$ を満たすと仮定する. すると, $\Gamma \models C$ より, $\llbracket C \rrbracket_v = T$. 解釈の定義から $\llbracket A \rrbracket_v = \llbracket C \vee D \rrbracket_v = T$. よって, $\Gamma \models A$.

問題 2

- 最後に用いられた推論規則が $\vee$ の除去規則の場合.

このとき, 命題論理式 B, C および 3 つの証明図

$$\frac{\mathcal{D}_1}{B \vee C} \quad \frac{[B]}{\mathcal{D}_2} \frac{A}{A} \quad \frac{[C]}{\mathcal{D}_3} \frac{A}{A}$$

が存在して,

$$D = \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{B \vee C} \quad \frac{[B]^i}{\mathcal{D}_2} \frac{A}{A} \quad \frac{[C]^i}{\mathcal{D}_3} \frac{A}{A}}{A} \vee E^i$$

となっている.

$\mathcal{D}_1$ の除去されていない仮定の集合を Γ_1 , $\mathcal{D}_2$ の除去されていない仮定の集合を $\Gamma_2 \cup \{B\}$, $\mathcal{D}_3$ の除去されていない仮定の集合を $\Gamma_3 \cup \{C\}$, (ただし, $B \notin \Gamma_2, C \notin \Gamma_3$) とおく. このとき, $\mathcal{D}$ の除去されていない仮定の集合は $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ となるから, $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \subseteq \Gamma$. また, 帰納法の仮定から, $\Gamma_1 \models B \vee C$, $\Gamma_2 \cup \{B\} \models A$, $\Gamma_3 \cup \{C\} \models A$ が成立する.

今, 付値 v が, 任意の $B \in \Gamma$ について $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ を満たすと仮定する. すると, $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ および $\Gamma_1 \models B \vee C$ より, $\llbracket B \vee C \rrbracket_v = \text{T}$. よって, 解釈の定義より, $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ または $\llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$ が成立する.

$\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$ の場合, $\Gamma_2 \subseteq \Gamma$ および $\Gamma_2 \cup \{B\} \models A$ より, $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$ が成立する.

$\llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$ の場合, $\Gamma_3 \subseteq \Gamma$ および $\Gamma_3 \cup \{C\} \models A$ より, $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$ が成立する.

よって, いずれの場合も $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$ となる. よって, $\Gamma \models A$.