

2021年度 数理論理学

講義資料(13)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

$\forall$ の除去規則の適用する際の注意.

推論規則の結論部 $[x := t](A)$ では, 代入を実行している. このため, 代入に関する注意事項を思い出すこと.

演習 13.1. 以下の $\forall E$ の適用例が正しいかどうか述べよ.

$$\begin{array}{ccc} \frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(0, y)} \forall E}{P(0, 0)} \forall E & \frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(x, y)} \forall E}{P(x, y)} \forall E & \frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(z, y)} \forall E}{P(z, z)} \forall E \\ \frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(x, y)} \forall E}{P(x, x)} \forall E & \frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(y, y)} \forall E}{P(y, y)} \forall E & \frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall z P(y, z)} \forall E}{P(y, y)} \forall E \end{array}$$

3/13

目次

- 述語論理の自然演繹体系(1): $\forall$ の推論

(解答)

$$\begin{array}{ccc} \frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(0, y)} \forall E}{P(0, 0)} \forall E & \frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(x, y)} \forall E}{P(x, y)} \forall E & \frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(z, y)} \forall E}{P(z, z)} \forall E \\ \text{正しい} & \text{正しい} & \text{正しい} \\ \frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(x, y)} \forall E}{P(x, x)} \forall E & \frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(y, y)} \forall E}{P(y, y)} \forall E & \frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall z P(y, z)} \forall E}{P(y, y)} \forall E \\ \text{正しい} & \text{正しくない} & \text{正しい} \end{array}$$

4/13

自然演繹体系(1): $\forall$ の推論

述語論理の自然演繹体系は, 命題論理の自然演繹体系に $\forall, \exists$ のそれぞれについての導入規則, 除去規則, 等号に関する推論規則を追加することによって得られる.

(11) $\forall$ の導入

(12) $\forall$ の除去

$$\frac{\frac{\vdots}{A} \forall I}{\forall x A} \forall I$$

$$\frac{\frac{\vdots}{\forall x A} \forall E}{[x := t](A)} \forall E$$

ただし, x が自由に出現する仮定は, 全て除去されているとする. ここで, t は任意の項を表す.

1/13

$\forall$ の導入規則の適用例と注意

$\forall$ の導入規則の適用例.

$$\frac{\frac{\vdots}{x \times 1 \approx x}}{\forall x (x \times 1 \approx x)} \forall I$$

ただし, このような推論が成立するのは, x に関する仮定が何もされていない時のみ.

推論規則の条件

「 x が自由に出現する仮定は, 全て除去されているとする」

はこれを保証する.

5/13

$\forall$ の除去規則の適用例と注意

$\forall$ の除去規則の適用例.

(1)

$$\frac{\frac{\vdots}{\forall x (x \approx x)} \forall E}{0 \approx 0} \forall E$$

(2)

$$\frac{\frac{\vdots}{\forall x (0 \approx x \times 0)} \forall E}{0 \approx s(0) \times 0} \forall E$$

$\forall$ の除去規則は, $\forall x A$ が成立していれば, A の x のところは何を代入しても成立する, という推論. これは, $\forall x A$ の意味を考えると, 自然な推論.

2/13

$\forall$ の導入規則の正しくない適用例.

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{[x \approx 0]}}{\frac{x \times 1 \approx 0}{\forall x (x \times 1 \approx 0)}} \forall I}{\forall x (x \times 1 \approx 0)} \forall I$$

この場合, 除去されていない仮定 $[x \approx 0]$ のなかに, 変数 x の自由な出現があるのでダメ. もしこのようなことを許したとすると, $\forall E$ 規則と合わせて,

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{[x \approx 0]}}{\frac{x \times 1 \approx 0}{\forall x (x \times 1 \approx 0)}} \forall I}{\frac{1 \times 1 \approx 0}{\forall x (x \times 1 \approx 0)}} \forall E$$

のような証明が出来てしまうため, 明らかにおかしい.

6/13

演習 13.2. 以下の $\forall$ I の適用例が正しいかどうか述べよ.

$$\frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(z)} \forall E}{\forall x (P(x) \wedge Q(z))} \forall I \quad \frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(z)} \forall E}{\forall z (P(x) \wedge Q(z))} \forall I \quad \frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(z)} \forall E}{\forall y (P(x) \wedge Q(z))} \forall I$$

$$\frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(x)} \forall E}{\forall x (P(x) \wedge Q(x))} \forall I \quad \frac{\frac{[\forall y (P(y) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(x)} \forall E}{\forall x (P(x) \wedge Q(x))} \forall I \quad \frac{\frac{[\forall y (P(y) \wedge Q(y))]}{P(y) \wedge Q(y)} \forall E}{\forall y (P(y) \wedge Q(y))} \forall I$$

$$(((\forall y P(y)) \wedge (\forall z Q(z))) \rightarrow (\forall x (P(x) \wedge Q(x))))$$

$$\frac{\frac{[\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z)]^1}{\forall y P(y)} \wedge E}{P(x)} \forall E \quad \frac{\frac{[\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z)]^1}{\forall z Q(z)} \wedge E}{Q(x)} \forall E$$

$$\frac{P(x) \wedge Q(x)}{\forall x (P(x) \wedge Q(x))} \forall I$$

$$\frac{\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))}{\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))} \rightarrow I^1$$

演習 13.5. $\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall z P(z, z)$ の証明図を書け.

(解答)

$$\frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(z)} \forall E}{\forall x (P(x) \wedge Q(z))} \forall I \quad \frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(z)} \forall E}{\forall z (P(x) \wedge Q(z))} \forall I \quad \frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(z)} \forall E}{\forall y (P(x) \wedge Q(z))} \forall I$$

正しくない 正しい 正しい

$$\frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(x)} \forall E}{\forall x (P(x) \wedge Q(x))} \forall I \quad \frac{\frac{[\forall y (P(y) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(x)} \forall E}{\forall x (P(x) \wedge Q(x))} \forall I \quad \frac{\frac{[\forall y (P(y) \wedge Q(y))]}{P(y) \wedge Q(y)} \forall E}{\forall y (P(y) \wedge Q(y))} \forall I$$

正しくない 正しい 正しい

$$\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall z P(z, z)$$

$$\frac{[\forall x \forall y P(x, y)]^1}{\forall y P(z, y)} \forall E$$

$$\frac{\forall y P(z, y)}{P(z, z)} \forall E$$

$$\frac{P(z, z)}{\forall z P(z, z)} \forall I$$

$$\frac{\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall z P(z, z)}{\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall z P(z, z)} \rightarrow I^1$$

$\forall$ I, $\forall$ E を用いた証明図の例.

$$\frac{\frac{[\forall x \forall y P(x, y)]^1}{\forall y P(x, y)} \forall E}{\frac{P(x, y)}{\forall x P(x, y)} \forall I} \forall I \quad \frac{\frac{[\forall x P(x)]^1}{P(y)} \forall E}{\forall y P(y)} \forall I$$

$$\frac{\forall y \forall x P(x, y)}{\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \forall x P(x, y)} \rightarrow I^1 \quad \frac{\forall y P(y)}{\forall x P(x) \rightarrow \forall y P(y)} \rightarrow I^1$$

まとめ

- 述語論理の自然演繹体系 (1)
 - ∀ の導入規則と 除去規則
 - ∀ の導入規則における変数条件

演習 13.3. 以下の証明図は正しいか? 正しくないなら, どこが誤っている推論ステップが指摘せよ.

$$\frac{\frac{[\forall x P(x, x)]^1}{P(y, z)} \forall E}{\frac{\forall z P(y, z)}{\forall y \forall z P(y, z)} \forall I} \forall I$$

$$\frac{\forall y \forall z P(y, z)}{\forall x P(x, x) \rightarrow \forall y \forall z P(y, z)} \rightarrow I^1$$

演習 13.4. $\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$ の省略されている括弧を補え. また, その証明図を書け.