

2021年度 数理論理学

講義資料(13)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

- 述語論理の自然演繹体系 (1): $\forall$ の推論

自然演繹体系(1): $\forall$ の推論

述語論理の自然演繹体系は，命題論理の自然演繹体系に $\forall, \exists$ のそれぞれについての導入規則，除去規則，等号に関する推論規則を追加することによって得られる．

(11) $\forall$ の導入

$$\frac{\vdots}{\forall x A} \forall I$$

ただし， x が自由に出現する仮定は，全て除去されているとする．

(12) $\forall$ の除去

$$\frac{\vdots}{[x := t](A)} \forall E$$

ここで， t は任意の項を表す．

∀の除去規則の適用例と 注意

∀の除去規則の適用例.

(1)

$$\frac{\vdots \quad \forall x (x \approx x)}{0 \approx 0} \forall E$$

(2)

$$\frac{\vdots \quad \forall x (0 \approx x \times 0)}{0 \approx s(0) \times 0} \forall E$$

∀の除去規則は、 $\forall x A$ が成立していれば、 A の x のところに何を代入しても成立する、という推論。これは、 $\forall x A$ の意味を考えると、自然な推論。

∀の除去規則の適用する際の注意.

推論規則の結論部 $[x := t](A)$ では, 代入を実行している. このため, 代入に関する注意事項を思い出すこと.

演習 13.1. 以下の∀Eの適用例が正しいかどうか述べよ.

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(0, y)} \forall E}{P(0, 0)} \forall E$$

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(x, y)} \forall E}{P(x, y)} \forall E$$

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(z, y)} \forall E}{P(z, z)} \forall E$$

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(x, y)} \forall E}{P(x, x)} \forall E$$

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(y, y)} \forall E}{P(y, y)} \forall E$$

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall z P(y, z)} \forall E}{P(y, y)} \forall E$$

(解答)

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(0, y)} \forall E}{P(0, 0)} \forall E$$

正しい

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(x, y)} \forall E}{P(x, y)} \forall E$$

正しい

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(z, y)} \forall E}{P(z, z)} \forall E$$

正しい

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(x, y)} \forall E}{P(x, x)} \forall E$$

正しい

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall y P(y, y)} \forall E}{P(y, y)} \forall E$$

正しくない

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x \forall y P(x, y)}{\forall z P(y, z)} \forall E}{P(y, y)} \forall E$$

正しい

∀の導入規則の適用例と注意

∀の導入規則の適用例.

$$\frac{\vdots \quad x \times 1 \approx x}{\forall x (x \times 1 \approx x)} \forall I$$

ただし, このような推論が成立するのは, x に関する仮定が何もされていない時のみ.

推論規則の条件

「 x が自由に出現する仮定は, 全て除去されているとする」

はこれを保証する.

∀の導入規則の正しくない適用例.

$$\frac{\begin{array}{c} [x \approx 0] \\ \vdots \\ x \times 1 \approx 0 \end{array}}{\forall x (x \times 1 \approx 0)} \forall I$$

この場合，除去されていない仮定 $[x \approx 0]$ のなかに，変数 x の自由な出現があるのでダメ．もしこのようなことを許したとすると， $\forall E$ 規則と合わせて，

$$\frac{\frac{\begin{array}{c} [x \approx 0] \\ \vdots \\ x \times 1 \approx 0 \end{array}}{\forall x (x \times 1 \approx 0)} \forall I}{1 \times 1 \approx 0} \forall E$$

のような証明が出来てしまうため，明らかにおかしい．

演習 13.2. 以下の $\forall I$ の適用例が正しいかどうか述べよ.

$$\frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(z)} \forall E}{\forall x (P(x) \wedge Q(z))} \forall I$$

$$\frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(z)} \forall E}{\forall z (P(x) \wedge Q(z))} \forall I$$

$$\frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(z)} \forall E}{\forall y (P(x) \wedge Q(z))} \forall I$$

$$\frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(x)} \forall E}{\forall x (P(x) \wedge Q(x))} \forall I$$

$$\frac{\frac{[\forall y (P(y) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(x)} \forall E}{\forall x (P(x) \wedge Q(x))} \forall I$$

$$\frac{\frac{[\forall y (P(y) \wedge Q(y))]}{P(y) \wedge Q(y)} \forall E}{\forall y (P(y) \wedge Q(y))} \forall I$$

(解答)

$$\frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(z)} \forall E}{\forall x (P(x) \wedge Q(z))} \forall I$$

正しくない

$$\frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(z)} \forall E}{\forall z (P(x) \wedge Q(z))} \forall I$$

正しい

$$\frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(z)} \forall E}{\forall y (P(x) \wedge Q(z))} \forall I$$

正しい

$$\frac{\frac{[\forall y (P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(x)} \forall E}{\forall x (P(x) \wedge Q(x))} \forall I$$

正しくない

$$\frac{\frac{[\forall y (P(y) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(x)} \forall E}{\forall x (P(x) \wedge Q(x))} \forall I$$

正しい

$$\frac{\frac{[\forall y (P(y) \wedge Q(y))]}{P(y) \wedge Q(y)} \forall E}{\forall y (P(y) \wedge Q(y))} \forall I$$

正しい

$\forall I, \forall E$ を用いた証明図の例.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\forall x \forall y P(x, y)]^1}{\forall y P(x, y)} \forall E \\
 \frac{\forall y P(x, y)}{P(x, y)} \forall E \\
 \frac{P(x, y)}{\forall x P(x, y)} \forall I \\
 \frac{\forall x P(x, y)}{\forall y \forall x P(x, y)} \forall I \\
 \hline
 \forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \forall x P(x, y) \rightarrow I^1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{[\forall x P(x)]^1}{P(y)} \forall E \\
 \frac{P(y)}{\forall y P(y)} \forall I \\
 \hline
 \forall x P(x) \rightarrow \forall y P(y) \rightarrow I^1
 \end{array}$$

演習 13.3. 以下の証明図は正しいか？正しくないなら，どこが誤っている推論ステップが指摘せよ．

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\forall x P(x, x)]^1}{P(y, z)} \forall E \\
 \frac{P(y, z)}{\forall z P(y, z)} \forall I \\
 \frac{\forall z P(y, z)}{\forall y \forall z P(y, z)} \forall I \\
 \hline
 \forall x P(x, x) \rightarrow \forall y \forall z P(y, z) \rightarrow I^1
 \end{array}$$

演習 13.4. $\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$ の省略されている括弧を補え．また，その証明図を書け．

$$(((\forall y P(y)) \wedge (\forall z Q(z))) \rightarrow (\forall x (P(x) \wedge Q(x))))$$

$$\frac{\frac{\frac{[\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z)]^1}{\forall y P(y)} \wedge E}{P(x)} \forall E \quad \frac{\frac{[\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z)]^1}{\forall z Q(z)} \wedge E}{Q(x)} \forall E}{P(x) \wedge Q(x)} \wedge I}{\forall x (P(x) \wedge Q(x))} \forall I}{\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))} \rightarrow I^1$$

演習 13.5. $\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall z P(z, z)$ の証明図を書け.

$$\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall z P(z, z)$$

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x \forall y P(x, y)]^1}{\forall y P(z, y)} \forall E}{P(z, z)} \forall E}{\forall z P(z, z)} \forall I}{\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall z P(z, z)} \rightarrow I^1$$

まとめ

- 述語論理の自然演繹体系 (1)
 - ∀の導入規則と除去規則
 - ∀の導入規則における変数条件