

「オートマトンと形式言語」補足資料(2)

1 NFA の計算に関する補足 (教科書 1.2 節)

例 1 例 1.35 における NFA $N_4 = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_1, \{q_1\})$ を考える. $w = aa$ として, 教科書の受理性の定義 (p.62-63) にしたがって, 受理されることを示してみよう.

1. $w = aa = \varepsilon a \varepsilon a$ と表わされる. そこで, $y_1 = \varepsilon, y_2 = a, y_3 = \varepsilon, y_4 = a$ とおく.
2. $r_0 = q_1$
3. $r_1 = q_2 \in \delta(r_0, y_1) = \delta(q_1, \varepsilon) = \{q_3\}$
4. $r_2 = q_1 \in \delta(r_1, y_2) = \delta(q_2, a) = \{q_1\}$
5. $r_3 = q_2 \in \delta(r_2, y_3) = \delta(q_1, \varepsilon) = \{q_3\}$
6. $r_4 = q_1 \in \delta(r_3, y_4) = \delta(q_2, a) = \{q_1\}$
7. $r_4 \in \{q_1\}$

以上より, w は受理される.

2 NFA における受理性についての補足 (教科書 1.2 節)

DFA のときに倣って (補足資料 (1)), $\hat{\delta}$ を用いた NFA の受理性の別定義を紹介する.

定義 2 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を非決定性有限オートマトンとする.

1. $R \subseteq Q$ とするとき, $\mathcal{E}_\delta(R)$ は以下を満たす最小の集合と定義する:
 - (1) $R \subseteq \mathcal{E}_\delta(R)$
 - (2) 任意の $q \in \mathcal{E}_\delta(R)$ について, $\delta(q, \varepsilon) \subseteq \mathcal{E}_\delta(R)$ $\mathcal{E}_\delta(R)$ を R の δ による ε -閉包とよぶ.
2. このとき, $\hat{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ を以下のように再帰的に定義する:

$$\hat{\delta}(P, w) = \begin{cases} P & (w = \varepsilon \text{ の場合}) \\ \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(P'), w') & (w = xw', x \in \Sigma \text{ の場合}) \\ \text{ただし, } P' = \bigcup_{q \in P} \delta(q, x) \end{cases}$$

NFA の遷移関数 δ は, $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q)$. 一方, 上で定義した関数 $\hat{\delta}$ は, $\hat{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ であることに注意.

例 3 図 1.27 の非決定性有限オートマトン $N_1 = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_1, \{q_4\})$ を考える．このとき，

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\{q_1\}), 0101) &= \hat{\delta}(\{q_1\}, 0101) \\
&= \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\delta(q_1, 0)), 101) \\
&= \hat{\delta}(\{q_1\}, 101) \\
&= \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\delta(q_1, 1)), 01) \\
&= \hat{\delta}(\{q_1, q_2, q_3\}, 01) \\
&= \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\delta(q_1, 0) \cup \delta(q_2, 0) \cup \delta(q_3, 0)), 1) \\
&= \hat{\delta}(\{q_1, q_3\}, 1) \\
&= \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\delta(q_1, 1) \cup \delta(q_3, 1)), \varepsilon) \\
&= \hat{\delta}(\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \varepsilon) \\
&= \{q_1, q_2, q_3, q_4\}
\end{aligned}$$

上で定義した関数 $\hat{\delta}$ を用いると，非決定性有限オートマトンの受理する言語は，以下のように定義できる：

定義 4 $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を非決定性有限オートマトンとする．このとき， N の認識する (受理する) 言語 $L(N)$ は，次のように定義される．

$$L(N) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\{q_0\}), w) \cap F \neq \emptyset\}$$

3 NFA と DFA の等価性に関する補足 (教科書 定理 1.39)

前節で定義した受理性の定義を用いて，NFA と DFA の等価性の詳細な証明を示す．

定理 5 $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を非決定性有限オートマトンとする．このとき，決定性有限オートマトン $M = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ を以下により定義する：

1. $Q' = \mathcal{P}(Q)$,
2. $\delta'(R, x) = \mathcal{E}_\delta(\bigcup_{r \in R} \delta(r, x))$,
3. $q'_0 = \mathcal{E}_\delta(\{q_0\})$,
4. $F' = \{R \subseteq Q \mid R \cap F \neq \emptyset\}$.

このとき， $L(N) = L(M)$ ．

証明．まず，

$$\text{性質 (A) : 任意の } w \in \Sigma^*, R \subseteq Q \text{ について, } \hat{\delta}(R, w) = \hat{\delta}'(R, w)$$

を示す．

性質 (A) の証明．文字列 w の長さに関する帰納法で示す．

1. $|w| = 0$ の場合．このとき， $w = \varepsilon$ ．よって，

$$\hat{\delta}(R, \varepsilon) = R = \hat{\delta}'(R, \varepsilon)$$

2. $|w| > 0$ の場合. このとき, $w = xw'$ ($x \in \Sigma, w' \in \Sigma^*$) とおける. よって,

$$\begin{aligned}
 \hat{\delta}'(R, xw') &= \hat{\delta}'(\delta'(R, x), w') && (\hat{\delta}' \text{ の定義より}) \\
 &= \hat{\delta}(\delta'(R, x), w') && (\text{帰納法の仮定より}) \\
 &= \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\bigcup_{r \in R} \delta(r, x)), w') && (\delta' \text{ の定義より}) \\
 &= \hat{\delta}(R, xw') && (\hat{\delta} \text{ の定義より})
 \end{aligned}$$

(性質 (A) の証明の終わり)

従って,

$$\begin{aligned}
 w \in L(M) &\iff \hat{\delta}'(q_0, w) \in F' && (L(M) \text{ の定義より}) \\
 &\iff \hat{\delta}'(\mathcal{E}_\delta(\{q_0\}), w) \cap F \neq \emptyset && (F' \text{ の定義より}) \\
 &\iff \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\{q_0\}), w) \cap F \neq \emptyset && (\text{性質 A より}) \\
 &\iff w \in L(N) && (L(N) \text{ の定義より})
 \end{aligned}$$

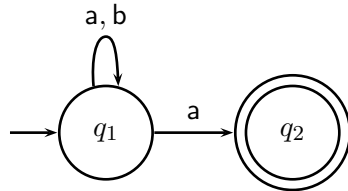
□

4 NFA の構成に関する補足 (1)(教科書 1.2 節)

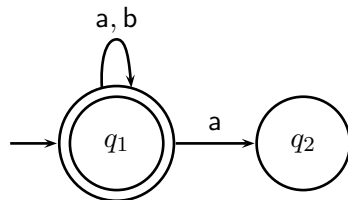
DFA のときに, 受理状態を反転 (受理状態を $Q \setminus F$ へ変更) することで, 認識する言語が補集合になることを示した (補足資料 (1)).

それとは対照的に, NFA の場合には, 受理状態を反転したからといって, 認識する言語が補集合になるとは限らない.

例 6 アルファベットを $\Sigma = \{a, b\}$ とする. 以下の状態遷移図で表わされる NFA N_1 を考えてみる.



このとき, $L(N_1) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ の末尾は } a\}$ となる. 一方, N_1 の受理状態を反転した NFA N_2 は以下ようになる.



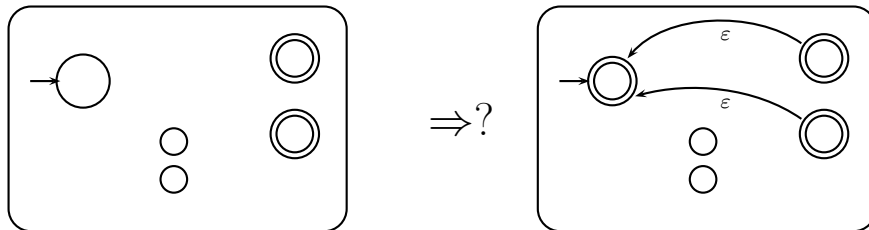
このとき, $L(N_2) = \Sigma^*$. よって, $L(N_2) \neq \Sigma^* \setminus L(N_1)$.

したがって, 一般に, 与えられた NFA の補集合を認識する有限オートマトンを構成するには, 一度, DFA へ変換した後, 受理状態を反転することになる.

5 NFA の構成に関する補足 (2)(教科書 1.2 節)

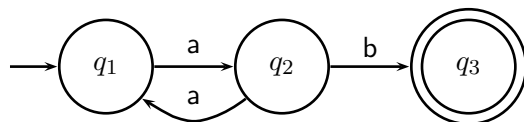
教科書 定理 1.49 で, A を認識する NFA から, A^* を認識する NFA の構成法を示している. そこでは, 初期状態として, 新しい状態を追加して用いているが, もとの初期状態をそのまま使ってはいけないのだろうか.

つまり, 次のような構成法である:

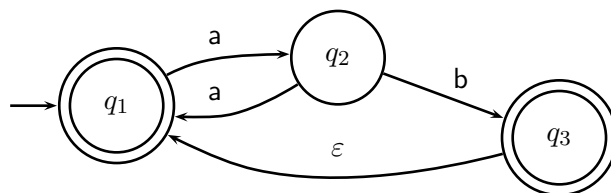


実際, 以下のように, この構成では, A^* を受理する NFA にならない場合がある.

例 7 アルファベットを $\Sigma = \{a, b\}$ とする. 以下の状態遷移図で表わされる NFA N_3 を考えてみる.



このとき, $L(N_3) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ は末尾が } b \text{ でその前に奇数個の } a \text{ がある} \}$ となる. 一方, N_3 を上記の構成法を使って変形した NFA N_4 は以下のようなになる.



このとき, $aa \in L(N_4)$ となるが, $L(N_3)$ の文字列を 0 回以上繰り返しても, aa は得られない. つまり, $aa \notin L(N_3)^*$ である.

このように, (新しい初期状態の追加が必要ない場合もあるが), 一般的には, 教科書のように新しい初期状態を追加する必要がある.