

「オートマトンと形式言語」補足資料(5)

1 DFA から正規表現への変換に関する補足 (教科書 p.80-88)

DFA から正規表現へ変換する手続きについて、整理しておく。

Step 1. DFA を GNFA へ変換する。このとき、DFA の状態数を k とすると、GNFA の状態数は $k + 2$ 個になる。

Step 2. GNFA の状態数が 2 個になるまで、以下を繰り返す：GNFA の等価変換により、GNFA の状態数を 1 つ減らす。

Step 3. 状態数が 2 個の GNFA から、正規表現を取り出す。

Step 3 は簡単。状態数が 2 個の GNFA には、辺が 1 つしかないので、その辺のラベルである正規表現を持ってくればよい。

DFA から GNFA への変換

まず、変換の手続きは以下の通り。

Step 1. DFA に、新しい状態 q_{start} と q_{accept} を追加する。

Step 2. 開始状態を q_{start} に変更し、 q_{start} からの辺を以下のように与える：

- q_{start} から元の開始状態へは、 ε の辺を与える。
- それ以外の状態へ、 $\emptyset$ の辺を与える。

Step 3. 終了状態を q_{accept} に変更し、 q_{accept} への辺を以下のように与える：

- 元々の終了状態からは、 ε の辺を与える。
- それ以外の状態からは、 $\emptyset$ の辺を与える。

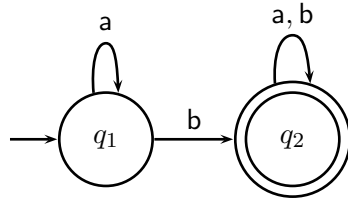
なお、 q_{start} から q_{accept} への辺は、Step 2 で与えても Step 3 で与えてもよいが、 $\emptyset$ の辺を与えることになる。

Step 4. 元の状態同士の辺 (自分自身同士も含む) を、以下のように場合によっては変更する。

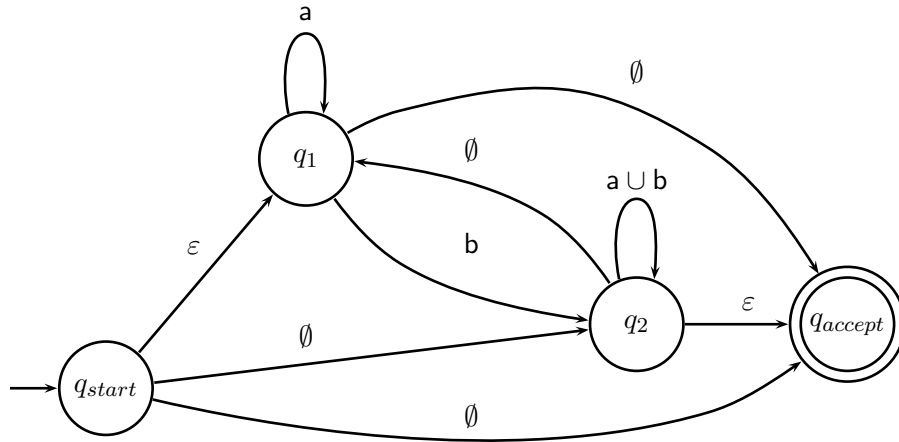
- 元の辺がないときは、 $\emptyset$ の辺を与える。
- 元の辺のラベルが複数あるとき、それを $\cup$ で繋いだ正規表現に変更する。例えば、ラベルが $a_1, \dots, a_k$ であれば、 $a_1 \cup \dots \cup a_k$ に直す。
- それ以外の場合はそのまま。

例 1. (教科書 図 1.67)

変換前の DFA M_1 :



変換後の GNFA N_1 :



なお、教科書では、ラベルが $\emptyset$ の辺は省略しているので注意.

GNFA の等価変換

GNFA の状態を 1 つ減らす等価変換手続きは以下の通り.

Step 1. q_{start} , q_{accept} 以外の状態から, 削除する状態を 1 つ選ぶ. ここでは, 選んだ状態を q_{rip} とおく.

Step 2. 状態 q_{rip} と q_{rip} につながっている辺をすべて取り除く.

Step 3. 残った辺のそれぞれについて, ラベルを以下のように更新する:

(a) 考える辺を q_i から q_j への辺とする.

(b) 正規表現 $R_1, \dots, R_4$ を以下のようにおく:

R_1 : 元の GNFA の, q_i から q_{rip} への辺のラベル

R_2 : 元の GNFA の, q_{rip} から q_{rip} への辺のラベル

R_3 : 元の GNFA の, q_{rip} から q_j への辺のラベル

R_4 : 元の GNFA の, q_i から q_j への辺のラベル

(c) q_i から q_j への辺のラベルを, $R_1 R_2^* R_3 \cup R_4$ に更新する.

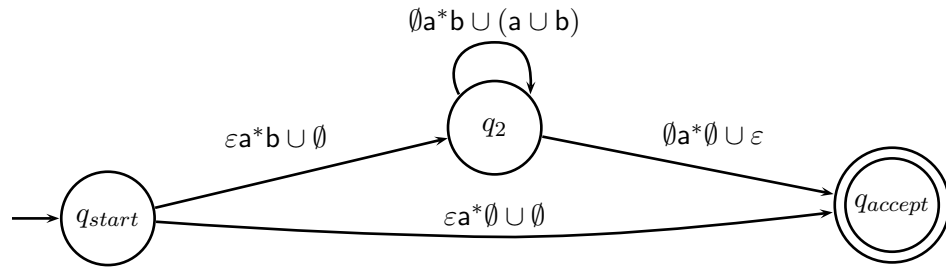
(もちろん, $R_1, \dots, R_4$ は, 考える辺によってそれぞれ異なるので注意.) なお, 正規表現は, 簡略化できるなら, した方がわかりやすい.

例 2.

さきほどの GNFA N_1 を変換して, GNFA N_2 を構成する.

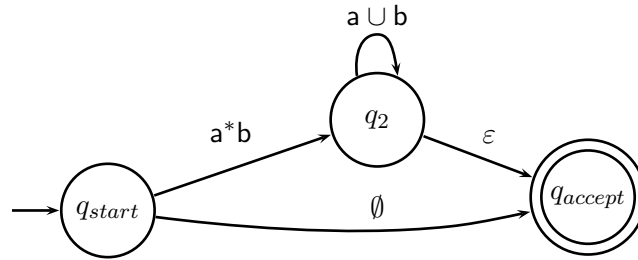
削除する状態に q_1 を選んだとしよう.

素直に, それぞれの辺を, $R_1 R_2^* R_3 \cup R_4$ の形で更新すると, 以下ようになる.



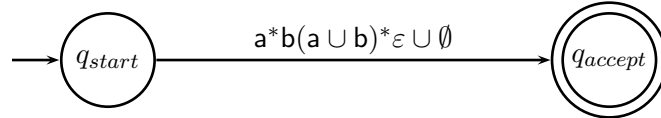
それぞれの正規表現を簡略化すると以下ようになる.

変換後の GNFA N_2 :



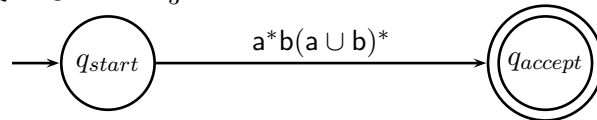
次に, GNFA N_2 を変換して, GNFA N_3 を構成する. 次に削除する状態としては, q_2 しか選択肢はない.

素直に, 辺を更新すると, 以下ようになる.



正規表現を簡略化すると以下ようになる.

変換後の GNFA N_3 :

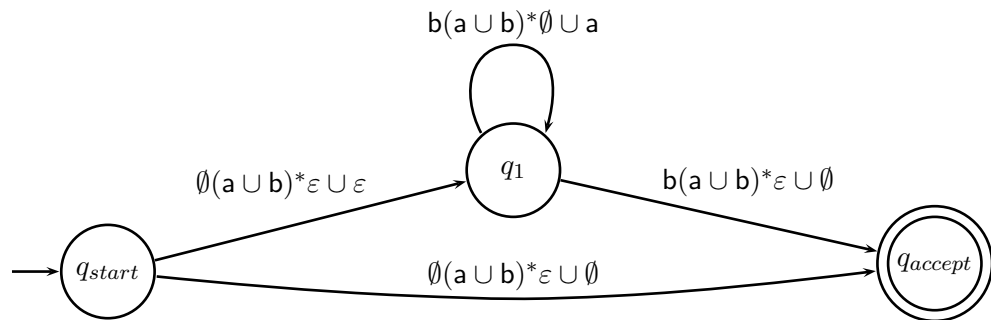


従って, DFA M_1 と等価な正規表現として, $a^* b (a \cup b)^*$ が得られた.

例 3.

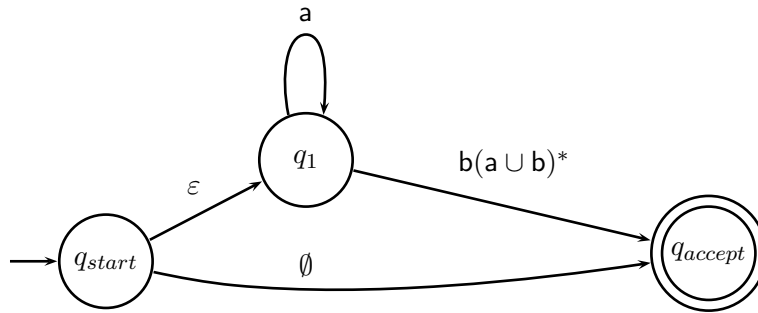
GNFA N_1 を変換する際に, 削除する状態に q_2 を選ぶことも出来る.

素直に, それぞれの辺を, $R_1 R_2^* R_3 \cup R_4$ の形で更新すると, 以下ようになる.



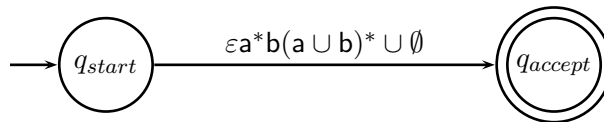
それぞれの正規表現を簡略化すると以下ようになる.

変換後の GNFA N_4 :



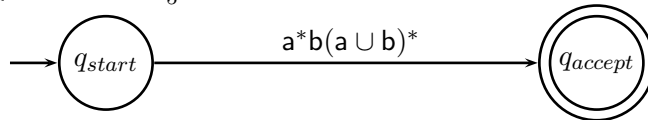
次に, GNFA N_4 を変換して, GNFA N_5 を構成する. 次に削除する状態としては, q_1 しか選択肢がない.

素直に, 辺を更新すると, 以下のようになる.



正規表現を簡略化すると以下のようになる.

変換後の GNFA N_5 :



従って, DFA M_1 と等価な正規表現として, $a^*b(a \cup b)^*$ が得られた.

この例の場合には, 結果として, どちらの順序で状態を削除しても, 同じ正規表現が得られたが, 場合によっては, 同じ正規表現が得られるとは限らない. しかし, 複数の正規表現が得られたとしても, それらは, 実は等価となっている. したがって, どのような順序で, 状態を削除しても構わない.