

2024 年度 数理論理学 復習問題 (11)

問題 1 述語論理式 A を $A = \forall y (Q(x, y) \wedge \exists x R(x, y, z))$ とおくとき, A における変数の自由出現と束縛出現をそれぞれ (わかるように印をつけて) 示せ.

問題 2 以下の述語論理式 A について, 自由変数の集合 $FV(A)$ を求めよ.

(1) $A = \forall x P(x, y) \wedge \forall z P(y, z)$

(2) $A = \forall x P(x, y) \wedge \forall y P(y, z)$

(3) $A = \forall x (P(x, y) \wedge \forall y P(x, y))$

問題 3 以下の述語論理式における束縛関係を図示するとともに, 自由出現を明示せよ.

(1) $\forall y (\forall x P(x, y) \wedge \exists x \forall y P(y, x))$

(2) $\forall y (\exists x P(f(x, y), z) \wedge \exists z P(x, f(y, z)))$

(3) $\forall x (\exists x Q(x) \wedge \exists y P(x, y) \wedge P(x, y))$

問題 4 以下の論理的同値性を同値変形を用いて示せ. (変形に用いた規則の名前も示すこと.)

(1) $\forall x (P(x) \rightarrow Q) \cong \exists x P(x) \rightarrow Q$

(2) $\exists x \forall y (P(a, y) \wedge P(x, y)) \cong \forall y P(a, y) \wedge \exists x \forall y P(x, y)$

(3) $\neg \forall x P(x, y) \wedge \forall y P(x, y) \cong \exists u \forall v (\neg P(u, y) \wedge P(x, v))$

問題 5 次の述語論理式の冠頭標準形を求めよ.

$\exists y (\neg \forall x P(x, y) \vee \forall x P(x, y))$

2024年度 数理論理学 復習問題解答 (11)

問題 1 部が束縛出現, 部が自由出現: $\forall y (Q(\underline{x}, \underline{y}) \wedge \exists x R(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}))$.

問題 2

(1) $FV(A) = \{y\}$

(2) $FV(A) = \{y, z\}$

(3) $FV(A) = \{y\}$

問題 3 束縛関係を矢印で, 自由出現は下線 で示す.

(1)

$$\forall y (\forall x P(x, y) \wedge \exists x \forall y P(y, x))$$

(2)

$$\forall y (\exists x P(f(x, y), \underline{z}) \wedge \exists z P(\underline{x}, f(y, z)))$$

(3)

$$\forall x (\exists x Q(x) \wedge \exists y P(x, y) \wedge P(x, \underline{y}))$$

問題 4

(1)

$$\begin{aligned} \forall x (P(x) \rightarrow Q) &\cong \forall x (\neg P(x) \vee Q) && \text{(含意の法則)} \\ &\cong \forall x \neg P(x) \vee Q && \text{(束縛の移動)} \\ &\cong \neg \exists x P(x) \vee Q && \text{(ド・モルガンの法則)} \\ &\cong \exists x P(x) \rightarrow Q && \text{(含意の法則)} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \exists x \forall y (P(a, y) \wedge P(x, y)) &\cong \exists x (\forall y P(a, y) \wedge \forall y P(x, y)) && \text{(全称の分配)} \\ &\cong \forall y P(a, y) \wedge \exists x \forall y P(x, y) && \text{(束縛の移動)} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \neg \forall x P(x, y) \wedge \forall y P(x, y) &\cong \exists x \neg P(x, y) \wedge \forall y P(x, y) && \text{(ド・モルガンの法則)} \\ &\cong \exists u \neg P(u, y) \wedge \forall y P(x, y) && \text{(束縛変数の名前替え)} \\ &\cong \exists u \neg P(u, y) \wedge \forall v P(x, v) && \text{(束縛変数の名前替え)} \\ &\cong \exists u \forall v (\neg P(u, y) \wedge P(x, v)) && \text{(束縛の移動)} \end{aligned}$$

問題 5

$$\begin{aligned} \exists y (\neg \forall x P(x, y) \vee \forall x P(x, y)) &\cong \exists y (\exists x \neg P(x, y) \vee \forall x P(x, y)) && \text{(ド・モルガンの法則)} \\ &\cong \exists y \exists x (\neg P(x, y) \vee \forall x P(x, y)) && \text{(束縛の移動)} \\ &\cong \exists y \exists x (\neg P(x, y) \vee \forall z P(z, y)) && \text{(束縛変数の名前替え)} \\ &\cong \exists y \exists x \forall z (\neg P(x, y) \vee P(z, y)) && \text{(束縛の移動)} \end{aligned}$$