

2024 年度 数理論理学 復習問題 (13)

問題 1

次の証明図に現われる $\forall I$ の推論規則の適用について、正しいか否か答えよ。また、正しくない場合には、その理由を次の形で述べよ。「除去されていない仮定... に変数... が自由に出現するため」。

(1)

$$\frac{\frac{\frac{[P(x)]^1 \quad [Q(y)]}{P(x) \wedge Q(y)} \wedge I}{P(x) \rightarrow P(x) \wedge Q(y)} \rightarrow I^1}{\forall y (P(x) \rightarrow P(x) \wedge Q(y))} \forall I$$

(2)

$$\frac{\frac{\frac{[P(x)]^1 \quad [Q(y)]}{P(x) \wedge Q(y)} \wedge I}{\forall x (P(x) \wedge Q(y))} \forall I}{P(x) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(y))} \rightarrow I^1$$

問題 2 以下の述語論理式の証明図を書け。

- (1) $\forall x ((P \rightarrow Q(x)) \wedge P \rightarrow Q(x))$
- (2) $\forall x P(x) \rightarrow P(a) \wedge P(b)$
- (3) $\forall x (P \rightarrow Q(x)) \rightarrow P \rightarrow \forall y Q(y)$
- (4) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall y P(y) \rightarrow \forall z Q(z)$

問題 3 以下の証明図について、正しくない推論を指摘するとともに正しい証明図に直せ。ただし、証明図の結論を変えてはいけない。

(1)

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x \forall y P(x, y)]^1}{\forall y P(y, y)} \forall E}{P(y, y)} \forall E}{\forall y P(y, y)} \forall I}{\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y P(y, y)} \rightarrow I^1$$

(2)

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x \forall y P(x, y)]^1}{\forall y P(x, y)} \forall E}{P(y, z)} \forall E}{\forall z P(y, z)} \forall I}{\forall y \forall z P(y, z)} \forall I}{\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \forall z P(y, z)} \rightarrow I^1$$

問題 4 以下の述語論理式の証明図を書け。

- (1) $\forall x P(x) \rightarrow \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y))$
- (2) $\forall x \forall y \forall z P(x, y, z) \rightarrow \forall x \forall y P(x, y, x)$
- (3) $\forall x P(x) \rightarrow \forall x \forall y P(f(x, y))$
- (4) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow P(a) \vee P(b) \rightarrow Q(a) \vee Q(b)$

2024年度 数理論理学 復習問題解答 (13)

問題 1

- (1) 正しくない. 除去されていない仮定 $[Q(y)]$ に変数 y が自由に出現するため.
 (2) 正しくない. 除去されていない仮定 $[P(x)]$ に変数 x が自由に出現するため. (仮定 $[P(x)]$ は最終的には除去されているが, $\forall I$ を適用する時点では除去されていないことに注意.)

問題 2

(1)

$$\frac{\frac{[(P \rightarrow Q(x)) \wedge P]^1}{P \rightarrow Q(x)} \wedge E \quad \frac{[(P \rightarrow Q(x)) \wedge P]^1}{P} \wedge E}{Q(x)} \rightarrow E$$

$$\frac{(P \rightarrow Q(x)) \wedge P \rightarrow Q(x)}{\forall x ((P \rightarrow Q(x)) \wedge P \rightarrow Q(x))} \rightarrow I^1 \quad \forall I$$

(2)

$$\frac{[\forall x P(x)]^1}{P(a)} \forall E \quad \frac{[\forall x P(x)]^1}{P(b)} \forall E$$

$$\frac{P(a) \wedge P(b)}{\forall x P(x) \rightarrow P(a) \wedge P(b)} \wedge I \rightarrow I^1$$

(3)

$$\frac{[\forall x (P \rightarrow Q(x))]^2}{P \rightarrow Q(y)} \forall E \quad [P]^1 \rightarrow E$$

$$\frac{Q(y)}{\forall y Q(y)} \forall I$$

$$\frac{P \rightarrow \forall y Q(y)}{\forall x (P \rightarrow Q(x)) \rightarrow P \rightarrow \forall y Q(y)} \rightarrow I^1 \rightarrow I^2$$

(4)

$$\frac{[\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall y P(y)]^1}{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))} \wedge E \quad \frac{[\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall y P(y)]^1}{\forall y P(y)} \wedge E$$

$$\frac{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))}{P(z) \rightarrow Q(z)} \forall E \quad \frac{\forall y P(y)}{P(z)} \forall E$$

$$\frac{Q(z)}{\forall z Q(z)} \forall I$$

$$\frac{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall y P(y) \rightarrow \forall z Q(z)}{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall y P(y) \rightarrow \forall z Q(z)} \rightarrow I^1$$

問題 3

- (1) 正しくないのは 1 番上の $\forall E$ の推論. 正しい証明図は,

$$\frac{[\forall x \forall y P(x, y)]^1}{\forall w P(y, w)} \forall E$$

$$\frac{\forall w P(y, w)}{P(y, y)} \forall E$$

$$\frac{P(y, y)}{\forall y P(y, y)} \forall I$$

$$\frac{\forall y P(y, y)}{\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y P(y, y)} \rightarrow I^1$$

変数 w は (y 以外の) 他の変数でもよい.

(2) 正しくないのは上から 2 番目 $\forall E$ の推論. 正しい証明図は,

$$\frac{\frac{\frac{\frac{[\forall x \forall y P(x, y)]^1}{\forall w P(y, w)} \forall E}{P(y, z)} \forall E}{\forall z P(y, z)} \forall I}{\forall y \forall z P(y, z)} \forall I}{\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \forall z P(y, z)} \rightarrow I^1$$

変数 w は (y 以外の) 他の変数でもよい.

問題 4

(1)

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x P(x)]^1}{P(x)} \forall E}{P(x) \wedge P(y)} \wedge I}{\forall y (P(x) \wedge P(y))} \forall I}{\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y))} \forall I}{\forall x P(x) \rightarrow \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y))} \rightarrow I^1$$

(2)

$$\frac{\frac{\frac{\frac{[\forall x \forall y \forall z P(x, y, z)]^1}{\forall y \forall z P(x, y, z)} \forall E}{\forall z P(x, y, z)} \forall E}{P(x, y, x)} \forall E}{\forall y P(x, y, x)} \forall I}{\forall x \forall y P(x, y, x)} \forall I}{\forall x \forall y \forall z P(x, y, z) \rightarrow \forall x \forall y P(x, y, x)} \rightarrow I^1$$

(3)

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x P(x)]^1}{P(f(x, y))} \forall E}{\forall y P(f(x, y))} \forall I}{\forall x \forall y P(f(x, y))} \forall I}{\forall x P(x) \rightarrow \forall x \forall y P(f(x, y))} \rightarrow I^1$$

(4)

$$\frac{[P(a) \vee P(b)]^2}{\frac{\frac{[\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))]^1}{P(a) \rightarrow Q(a)} \forall E}{Q(a)} \vee I}{\frac{[P(a)]^1}{P(a) \rightarrow Q(a)} \rightarrow E}{\frac{[\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))]^1}{P(b) \rightarrow Q(b)} \forall E}{\frac{[P(b)]^1}{P(b) \rightarrow Q(b)} \rightarrow E}{\frac{Q(b)}{Q(a) \vee Q(b)} \vee I}{\frac{Q(a) \vee Q(b)}{P(a) \vee P(b) \rightarrow Q(a) \vee Q(b)} \rightarrow I^2}{\frac{Q(a) \vee Q(b)}{P(a) \vee P(b) \rightarrow Q(a) \vee Q(b)} \rightarrow I^2}{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow P(a) \vee P(b) \rightarrow Q(a) \vee Q(b)} \rightarrow I^3$$