

2024年度 数理論理学 復習問題(15)

R を集合 A 上の関係とする.

1. R が反射的である (反射性をもつ) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $x \in A$ について $x R x$
2. R が推移的である (推移性をもつ) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $x, y, z \in A$ について, $x R y$ かつ $y R z$ ならば, $x R z$

また, 関係とは集合 A の要素の対の集合で, $x R y$ は $\langle x, y \rangle \in R$ の略記であることに注意せよ.

集合 A 上の関係 S が, 以下の4つの条件

- (1) $R \subseteq S$
- (2) S は反射的
- (3) S は推移的
- (4) 任意の関係 S' について, $R \subseteq S'$ かつ S' が反射的かつ S' が推移的ならば, $S \subseteq S'$ が成立

を満たすとき, 関係 S を, R の反射推移閉包とよぶ.

問題 1 R の反射推移閉包が一意に定まることを示せ. (つまり, S_1 と S_2 の両方が, R の反射推移閉包ならば, $S_1 = S_2$ となることを示せ.)

次に, A 上の関係 $R_0, R_1, \dots$ を以下のように再帰的に定める:

$$\begin{aligned} R_0 &= \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \} \\ R_{n+1} &= R \circ R_n \end{aligned}$$

なお, 関係の合成の定義に注意せよ:

$$S \circ T = \{ \langle x, z \rangle \mid \text{ある } y \text{ が存在して } \langle x, y \rangle \in S \text{ かつ } \langle y, z \rangle \in T \}$$

最後に, $R_\infty = \bigcup_{i \geq 0} R_i$ とおく.

問題 2 $R \subseteq R_\infty$ となることを示せ.

問題 3 R_∞ が反射的であることを示せ. (ヒント: $R = R_1$ となることを示せ.)

問題 4 任意の自然数 n, m について, $R_n \circ R_m = R_{n+m}$ となることを示せ. (ただし, 関係の合成についての結合律 $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ は用いてよいものとする.)

問題 5 R_∞ が推移的であることを示せ.

問題 6 R_∞ が R の反射推移閉包であることを示せ.

2024年度 数理論理学 復習問題解答 (15)

問題 1 S_1 と S_2 の両方が, R の反射推移閉包であると仮定する. このとき, S_1 が反射推移閉包であるので, S_1 について条件 (4) が成立する. すなわち, 任意の関係 S' について, $R \subseteq S'$ かつ S' が反射的かつ S' が推移的ならば, $S_1 \subseteq S'$. よって, $R \subseteq S_2$ かつ S_2 が反射的かつ S_2 が推移的ならば, $S_1 \subseteq S_2$. ここで, 仮定より S_2 は R の反射推移閉包であったから, S_2 について条件 (1)–(3) が成立し, $R \subseteq S_2$ かつ S_2 は反射的かつ S_2 は推移的. よって, $S_1 \subseteq S_2$ が成立する. また, 以上の議論を, S_1 と S_2 を逆にしてすれば, $S_2 \subseteq S_1$ が成立することがわかる. したがって, $S_1 \subseteq S_2$ かつ $S_2 \subseteq S_1$ となり, $S_1 = S_2$ が成立する.

問題 2 まず, $R = R_1$ を示す.

いま, 任意の $\langle x, z \rangle \in R_1$ をとる. このとき, $R_1 = R \circ R_0$ であるから, $\langle x, z \rangle \in R \circ R_0$. よって, ある y が存在して, $\langle x, y \rangle \in R$ かつ $\langle y, z \rangle \in R_0$. ここで, R_0 の定義から, $y = z$. よって, $\langle x, y \rangle \in R$ から, $\langle x, z \rangle \in R$ が成立する. 以上より, $\langle x, z \rangle \in R_1$ ならば $\langle x, z \rangle \in R$. よって, 任意の $\langle x, z \rangle \in R_1$ について, $\langle x, z \rangle \in R$. よって, 部分集合の定義から, $R_1 \subseteq R$.

任意の $\langle x, z \rangle \in R$ をとる. このとき, $\langle z, z \rangle \in R_0$ であることから, $\langle x, z \rangle \in R \circ R_0$. よって, $\langle x, z \rangle \in R_1$. 以上より, 任意の $\langle x, z \rangle \in R$ について, $\langle x, z \rangle \in R_1$. よって, $R \subseteq R_1$.

以上から, $R_1 \subseteq R$ かつ $R \subseteq R_1$ となるので, $R = R_1$.

最後に, 和集合の性質から $R_1 \subseteq \bigcup_{i \geq 0} R_i$ となるので, $R \subseteq R_\infty$ が成立する.

問題 3 x を集合 A の任意の要素とする. このとき, R_0 の定義から, $\langle x, x \rangle \in R_0$. また, 和集合の性質から $R_0 \subseteq \bigcup_{i \geq 0} R_i$ となるので, $\langle x, x \rangle \in R_\infty$ が成立する. 以上より, 任意の $x \in A$ について, $\langle x, x \rangle \in R_\infty$. したがって, R_∞ は反射的.

問題 4 n に関する帰納法で示す.

基本ステップ: $n = 0$ のとき. このとき, R_0 の定義から, $R_0 \circ R_m = R_m$ が成立する. (丁寧な証明も問題 2 と同様にしてできるが, ここでは省略.)

基本ステップ: $n = k+1$ のとき. このとき, 帰納法の仮定および関係の合成の結合律を用いて, $R_{k+1} \circ R_m = (R \circ R_k) \circ R_m = R \circ (R_k \circ R_m) = R \circ R_{k+m} = R_{k+m+1} = R_{n+m}$. (最後の等式変形は, 自然数の加算の交換律や結合律を用いているが, もちろん, ここでは使ってよいものとしておく.)

問題 5 x, y, z を集合 A の任意の要素とする. いま, $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R_\infty$ と仮定する. このとき, $\langle x, y \rangle \in \bigcup_{i \geq 0} R_i$. よって, 和集合の定義から, ある自然数 n が存在して, $\langle x, y \rangle \in R_n$. よって, $\langle x, y \rangle \in R_n$ となる自然数 n が得られる.

同様に, $\langle y, z \rangle \in \bigcup_{i \geq 0} R_i$ であることから, ある自然数 m が存在して, $\langle y, z \rangle \in R_m$. よって, $\langle y, z \rangle \in R_m$ となる自然数 m が得られる.

したがって, $\langle x, z \rangle \in R_n \circ R_m$ が成立する. ここで, 問題 4 を用いると, $\langle x, z \rangle \in R_{n+m}$ が成立. したがって, $\langle x, z \rangle \in R_l$ となる自然数 l が得られた. よって, ある

自然数 l が存在して, $\langle x, z \rangle \in R_l$. よって, 和集合の性質から, $\langle x, z \rangle \in \bigcup_{i \geq 0} R_i$.
したがって, $\langle x, z \rangle \in R_\infty$.

以上より, 任意の $x, y, z \in A$ について, $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R_\infty$ なら, $\langle x, z \rangle \in R_\infty$ が成立する. よって, R_∞ は推移的.

問題 6 問題 2,3,5 より, 反射推移閉包の条件 (1)–(3) は成立する. あと, 条件 (4) が成立することを示せばよい.

S' を A 上の任意の関係とする. また, $R \subseteq S'$, かつ, S' は反射的, かつ, S' は推移的, と仮定する. $\langle x, y \rangle \in R_\infty$ とする. すると, ある自然数 n が存在して, $\langle x, y \rangle \in R_n$. よって, $\langle x, y \rangle \in R_n$ となる自然数 n が得られる.

ここで, 任意の自然数 i について, i に関する帰納法で, $R_i \subseteq S'$ となることを示す.

基本ステップ: $i = 0$ の場合. $\langle x, y \rangle \in R_0$ と仮定する. すると, R_0 の定義から, $x = y$. よって, S' が反射的であることから, $\langle x, y \rangle \in S'$. したがって, 任意の $\langle x, y \rangle \in R_0$ について, $\langle x, y \rangle \in S'$. よって, $R_0 \subseteq S'$. 帰納ステップ: $i = k + 1$ の場合.

$\langle x, z \rangle \in R_{k+1}$ と仮定する. すると, $\langle x, z \rangle \in R \circ R_k$. よって, ある y が存在して, $\langle x, y \rangle \in R$ かつ $\langle y, z \rangle \in R_k$. つまり, $\langle x, y \rangle \in R$ かつ $\langle y, z \rangle \in R_k$ なる y が得られる. このとき, $R \subseteq S'$ であつたから, $\langle x, y \rangle \in S'$ が成立. また, 帰納法の仮定より, $\langle y, z \rangle \in S'$ が成立する. さらに, S' の推移性より, $\langle x, y \rangle \in S'$ および $\langle y, z \rangle \in S'$ なので, $\langle x, z \rangle \in S'$ が成立する. 以上より, 任意の $\langle x, z \rangle \in R_i$ について, $\langle x, z \rangle \in S'$ が成立する. したがって, $R_{k+1} \subseteq S'$.

以上より, 任意の自然数 i について, $R_i \subseteq S'$ が成立する. よって, 和集合の性質から $\bigcup_{i \geq 0} R_i \subseteq S'$ となり, $R_\infty \subseteq S'$.

したがって, R_∞ について, 反射推移閉包の条件 (1)–(4) が成立するので, R_∞ は R の反射推移閉包.