

2024年度 数理論理学 復習問題 (2)

問題 1 以下のように命題をおく. P : 天気がよい. Q : 散歩に行く R : 傘をもつ. このとき, 以下の命題が表す意味を述べよ. (1) $P \rightarrow Q$. (2) $(\neg P) \rightarrow (\neg Q)$. (3) $((\neg P) \wedge Q) \rightarrow R$.

問題 2 $Q \wedge R$ が偽のとき, $(R \rightarrow P) \vee (Q \rightarrow P)$ の真理値は1つに定まるか, 真理値表を書いて考えよ. 定まる場合はその真理値を答えよ.

問題 3 次の命題論理式の省略されている括弧を (講義資料の命題論理式の定義に合致するように) すべて補え.

(1) $P \wedge P \rightarrow (P \rightarrow \neg P \vee P) \rightarrow P$

(2) $P \rightarrow (P \vee P \rightarrow \neg P \vee P) \rightarrow P$

問題 4 次の命題論理式の括弧を (講義資料の括弧の省略の約束に従って) 可能な限り省略せよ.

(1) $(\neg(\neg((P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P))))$

(2) $((\neg P) \rightarrow ((\neg Q) \rightarrow (\neg R)))$

問題 5 次の命題論理式はトートロジーか, 真理値表を書いて調べよ.

(1) $\neg(P \wedge Q) \vee P$

(2) $P \wedge Q \rightarrow R \vee P$

(3) $\neg P \vee P$

問題 6 次の命題論理式は充足可能か, 真理値表を書いて調べよ.

(1) $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P$

(2) $\neg(P \rightarrow R) \wedge (Q \vee R)$

(3) $\neg(\neg P \leftrightarrow P)$

問題 7 次の命題論理式の真理値表を書き, トートロジーであるかどうか, 充足可能であるかどうか, 答えよ.

(1) $(P \wedge \neg Q) \vee Q$

(2) $\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee Q)$

(3) $P \wedge \neg Q \rightarrow \neg P \rightarrow Q$

2024年度 数理論理学 復習問題解答 (2)

問題 1

- (1) $P \rightarrow Q$: 天気がよいならば散歩に行く.
 (2) $(\neg P) \rightarrow (\neg Q)$: 天気が悪いならば散歩にいかない.
 (3) $((\neg P) \wedge Q) \rightarrow R$: 天気が悪くて散歩に行くならば傘をもつ.

問題 2 真理値表は以下のようなになる.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$R \rightarrow P$	$Q \rightarrow P$	$(R \rightarrow P) \vee (Q \rightarrow P)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	T	T	T

よって, $Q \wedge R$ が偽のとき, $(R \rightarrow P) \vee (Q \rightarrow P)$ はいつも真となる.

- 問題 3 (1) $((P \wedge P) \rightarrow ((P \rightarrow ((\neg P) \vee P)) \rightarrow P))$
 (2) $(P \rightarrow (((P \vee P) \rightarrow ((\neg P) \vee P)) \rightarrow P))$

- 問題 4 (1) $\neg\neg(P \wedge Q \rightarrow Q \wedge P)$ (2) $\neg P \rightarrow \neg Q \rightarrow \neg R$

問題 5 (1)

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg(P \wedge Q)) \vee P$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

よって, トートロジー.

(2) 真理値表は以下のようなになる.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$R \vee P$	$(P \wedge Q) \rightarrow (R \vee P)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	T

ゆえに，トートロジー．

(3)

P	$\neg P$	$\neg P \vee P$
T	F	T
F	T	T

よって，トートロジー．

問題 6 (1)

P	Q	$\neg P$	$\neg P \rightarrow Q$	$((\neg P) \rightarrow Q) \rightarrow P$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

よって，充足可能．

(2)

P	Q	R	$P \rightarrow R$	$\neg(P \rightarrow R)$	$Q \vee R$	$(\neg(P \rightarrow R)) \wedge (Q \vee R)$
T	T	T	T	F	T	F
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	T	F	T	F	T	F
F	F	T	T	F	T	F
F	F	F	T	F	F	F

ゆえに，充足可能．

(3) 真理値表は以下のようになる．

P	$\neg P$	$(\neg P) \leftrightarrow P$	$\neg((\neg P) \leftrightarrow P)$
T	F	F	T
F	T	F	T

従って，充足可能．

問題 7 (1) 真理値表は以下のようになる．

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge (\neg Q)$	$(P \wedge (\neg Q)) \vee Q$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	F

よって，トートロジーでないが，充足可能である．

(2)

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg(\neg(P \vee Q))$	$(\neg(P \vee Q)) \wedge (\neg(\neg(P \vee Q)))$
T	T	T	F	T	F
T	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	T	F	F

よって，トートロジーでない．また，充足可能でもない．

(3)

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge (\neg Q)$	$\neg P$	$(\neg P) \rightarrow Q$	$(P \wedge (\neg Q)) \rightarrow ((\neg P) \rightarrow Q)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	T
F	F	T	F	T	F	T

よって，トートロジーであり，充足可能である．