

## 2024 年度 数理論理学 復習問題 (9)

問題 1 健全性の証明における補題 9.5 にて，最後に用いられた推論規則が  $\vee$  の導入規則の場合の証明を示せ．

問題 2 健全性の証明における補題 9.5 にて，最後に用いられた推論規則が  $\vee$  の除去規則の場合の証明を示せ．

## 2024年度 数理論理学 復習問題解答 (9)

### 問題 1

- 最後に用いられた推論規則が  $\vee$  の導入規則の場合.

このとき, 証明図

$$\frac{\mathcal{D}_1}{C}$$

が存在して,  $A = C \vee D$  かつ

$$D = \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{C}}{C \vee D} \vee I$$

となっているか, あるいは,

$$\frac{\mathcal{D}_1}{D}$$

が存在して,  $A = C \vee D$  かつ

$$D = \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{D}}{C \vee D} \vee I$$

となっている.

前者の場合を考える. (後者の場合についても同様.)  $\mathcal{D}_1$  の除去されていない仮定の集合は,  $D$  の除去されていない仮定の集合と等しいので,  $\Gamma$  と等しい. また, 帰納法の仮定から,  $\Gamma \models C$ . 今, 付値  $v$  が, 任意の  $B \in \Gamma$  について  $\llbracket B \rrbracket_v = T$  を満たすと仮定する. すると,  $\Gamma \models C$  より,  $\llbracket C \rrbracket_v = T$ . 解釈の定義から  $\llbracket A \rrbracket_v = \llbracket C \vee D \rrbracket_v = T$ . よって,  $\Gamma \models A$ .

### 問題 2

- 最後に用いられた推論規則が  $\vee$  の除去規則の場合.

このとき, 命題論理式  $B, C$  および 3 つの証明図

$$\frac{\mathcal{D}_1}{B \vee C} \quad \frac{[B]}{\mathcal{D}_2} \frac{A}{A} \quad \frac{[C]}{\mathcal{D}_3} \frac{A}{A}$$

が存在して,

$$D = \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{B \vee C} \quad \frac{[B]^i}{\mathcal{D}_2} \frac{A}{A} \quad \frac{[C]^i}{\mathcal{D}_3} \frac{A}{A}}{A} \vee E^i$$

となっている.

$\mathcal{D}_1$  の除去されていない仮定の集合を  $\Gamma_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  の除去されていない仮定の集合を  $\Gamma_2 \cup \{B\}$ ,  $\mathcal{D}_3$  の除去されていない仮定の集合を  $\Gamma_3 \cup \{C\}$ , (ただし,  $B \notin \Gamma_2$ ,  $C \notin \Gamma_3$ ) とおく. このとき,  $\mathcal{D}$  の除去されていない仮定の集合は  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  となるから,  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \subseteq \Gamma$ . また, 帰納法の仮定から,  $\Gamma_1 \models B \vee C$ ,  $\Gamma_2 \cup \{B\} \models A$ ,  $\Gamma_3 \cup \{C\} \models A$  が成立する.

今, 付値  $v$  が, 任意の  $B \in \Gamma$  について  $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$  を満たすと仮定する. すると,  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$  および  $\Gamma_1 \models B \vee C$  より,  $\llbracket B \vee C \rrbracket_v = \text{T}$ . よって, 解釈の定義より,  $\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$  または  $\llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$  が成立する.

$\llbracket B \rrbracket_v = \text{T}$  の場合,  $\Gamma_2 \subseteq \Gamma$  および  $\Gamma_2 \cup \{B\} \models A$  より,  $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$  が成立する.

$\llbracket C \rrbracket_v = \text{T}$  の場合,  $\Gamma_3 \subseteq \Gamma$  および  $\Gamma_3 \cup \{C\} \models A$  より,  $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$  が成立する.

よって, いずれの場合も  $\llbracket A \rrbracket_v = \text{T}$  となる. よって,  $\Gamma \models A$ .