2024年度 数理論理学

講義資料(3)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

- 命題論理の意味論
- モデルと反例
- ブール関数

命題論理の意味論

ここでは，前回の授業で見てきた真理値表による真理値の計算を数学的な概念を用いて定義する．

なぜ，そんなことをするのだろうか? すべてを，真理値表だけでやるのではダメなのだろうか?

- 数学的な概念を用いて表わすことで，数学で培われたさまざまな概念や技法を再利用することが出来る．

- 数学的な概念を用いて表わすことで，抽象的に表すことが可能になる．これは拡張や一般化の際にとても役立つ．

など，さまざまな(しかも，非常に大きな!)ご利益がある．

例えば，命題論理では，論理式の真理値は真理値表を用いて計算できるが，述語論理ではそのように簡単にはいかない．しかし，数学的に定義した真理値の計算は，自然に述語論理へ一般化される．

その一方で，数学的な概念を用いると，イメージや直観がわきにくい，といったデメリットもあるかもしれない．数学的に与えられた定義から，そのイメージや直観をとらえるのも大事.

ということで，以下では，集合や関数，「すべての〇〇について〜」や「ある〇〇が存在して〜」といった言葉遣いなど，基礎的な数学概念を用いる．知識に不安のある者は付録を参照すること.

付値

定義 3.1.　真理値集合$\{\mathrm{T},\mathrm{F}\}$を`Bool`と記す．命題変数集合`Var`から真理値集合`Bool`への関数のことを**付値**とよぶ.

　なお，付値の具体例では，便宜的に，自然数の添字が付いた命題変数の集合$\mathtt{Var}=\{\mathtt{P}_0,\mathtt{P}_1,\ldots\}$を考える.

例．次のようにして定義される関数v_0は付値である：

$$v_0(\mathtt{P}_i)=\begin{cases}\mathrm{T} & (i\text{が偶数のとき})\\ \mathrm{F} & (i\text{が奇数のとき})\end{cases}$$

付値を指定することは，真理値表で行を1つ指定することに対応する．真理値表の行を1つ指定する(付値を決める)と，その時の命題論理式の真理値が定まる．これを解釈という($\Rightarrow$次ページ).

定義 3.2.　付値 v が与えられたときの命題論理式 A の解釈 $[\![A]\!]_v$ を次のように定める．

$$[\![P]\!]_v = v(P) \quad \text{(ただし，}P\text{は命題変数)}$$

$$[\![\neg A]\!]_v = \begin{cases} \mathrm{F} & ([\![A]\!]_v = \mathrm{T}\text{のとき}) \\ \mathrm{T} & ([\![A]\!]_v = \mathrm{F}\text{のとき}) \end{cases}$$

$$[\![A \wedge B]\!]_v = \begin{cases} \mathrm{T} & ([\![A]\!]_v = [\![B]\!]_v = \mathrm{T}\text{のとき}) \\ \mathrm{F} & \text{(それ以外)} \end{cases}$$

$$[\![A \vee B]\!]_v = \begin{cases} \mathrm{F} & ([\![A]\!]_v = [\![B]\!]_v = \mathrm{F}\text{のとき}) \\ \mathrm{T} & \text{(それ以外)} \end{cases}$$

$$[\![A \to B]\!]_v = \begin{cases} \mathrm{F} & ([\![A]\!]_v = \mathrm{T}, [\![B]\!]_v = \mathrm{F}\text{のとき}) \\ \mathrm{T} & \text{(それ以外)} \end{cases}$$

$$[\![A \leftrightarrow B]\!]_v = \begin{cases} \mathrm{T} & ([\![A]\!]_v = [\![B]\!]_v\text{のとき}) \\ \mathrm{F} & \text{(それ以外)} \end{cases}$$

$$v_0(\mathtt{P}_i) = \begin{cases} \mathrm{T} & (i\text{が偶数のとき}) \\ \mathrm{F} & (i\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

演習 3.3.

上の付値v_0について，前ページの定義に従って，$[\![\mathtt{P}_3 \wedge \mathtt{P}_6 \to \mathtt{P}_1]\!]_{v_0}$ の解釈を計算せよ．先に計算した真理値が，$\mathtt{P}_3 \wedge \mathtt{P}_6 \to \mathtt{P}_1$の真理値表のどの値に対応するか，考えよ．

演習 3.3.

定義より，$[\![\mathtt{P}_3]\!]_{v_0} = \mathrm{F}$, $[\![\mathtt{P}_6]\!]_{v_0} = \mathrm{T}$. よって，$[\![\mathtt{P}_3 \wedge \mathtt{P}_6]\!]_{v_0} = \mathrm{F}$.
よって，$[\![\mathtt{P}_3 \wedge \mathtt{P}_6 \to \mathtt{P}_1]\!]_{v_0} = \mathrm{T}$

$\mathtt{P}_3$	$\mathtt{P}_6$	$\mathtt{P}_1$	$\mathtt{P}_3 \wedge \mathtt{P}_6$	$(\mathtt{P}_3 \wedge \mathtt{P}_6) \to \mathtt{P}_1$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

演習 3.4.

$[\![\mathrm{P}_1 \vee \mathrm{P}_2]\!]_v = [\![\neg \mathrm{P}_1]\!]_v = \mathrm{T}$となるとき，$[\![\neg \mathrm{P}_2]\!]_v$の値がどうなるか示せ.

演習 3.4.
$[\![P_1 \lor P_2]\!]_v = [\![\neg P_1]\!]_v = \mathrm{T}$となるとき，$[\![\neg P_2]\!]_v$の値がどうなるか示せ.

(解答)
$[\![P_1 \lor P_2]\!]_v = \mathrm{T}$より，$v(P_1) = \mathrm{T}$または$v(P_2) = \mathrm{T}$.
一方，$[\![\neg P_1]\!]_v = \mathrm{T}$より，$[\![P_1]\!]_v = \mathrm{F}$なので，$v(P_1) = \mathrm{F}$.
よって，$v(P_2) = \mathrm{T}$となることがわかる.
よって，$[\![\neg P_2]\!]_v = \mathrm{F}$.

命題論理式の真理値の計算には，その命題論理式を構成する途中に使う部分命題論理式の計算が必要なことに注意.

($\Rightarrow$ これは真理値表の計算でも同じだった.)

トートロジーと充足可能性

トートロジーと充足可能性を真理値表でなく付値を使って定義すると以下のようになる.

定義 3.5. Aを命題論理式とする. 任意の付値vについて, $[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$となるとき, Aを**トートロジー**であるという.

Aの真理値表で, すべての行がTとなる場合に対応.

定義 3.6. Aを命題論理式とする. ある付値vが存在して, $[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$となるとき, Aを**充足可能**であるという.

1箇所でもAの真理値表にTとなる行がある場合に対応.

演習 3.7.
$\neg \mathtt{P} \lor \mathtt{P}$がトートロジーであることを解釈の定義を用いて示せ.

演習 3.8.
$(\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \land \neg \mathtt{Q}$が充足可能であることを解釈の定義を用いて示せ.

演習 3.7.

(解答) 任意の付値vについて，$[\![\neg \mathtt{P} \vee \mathtt{P}]\!]_v = \mathrm{T}$となることを示す．

$\underline{v(\mathtt{P}) = \mathrm{T}\text{のとき．}}$

このとき，$[\![\mathtt{P}]\!]_v = \mathrm{T}$となるので，$[\![\neg \mathtt{P} \vee \mathtt{P}]\!]_v = \mathrm{T}$が成立．

$\underline{v(\mathtt{P}) = \mathrm{F}\text{のとき．}}$

このとき，$[\![\neg \mathtt{P}]\!]_v = \mathrm{T}$となるので，$[\![\neg \mathtt{P} \vee \mathtt{P}]\!]_v = \mathrm{T}$が成立．

演習 3.8.

(解答) $v(\mathtt{P}) = \mathrm{T}$, $v(\mathtt{Q}) = \mathrm{F}$なる付値$v$をとると，$[\![\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T}$，$[\![\neg \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T}$となるので，$[\![(\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \wedge \neg \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T}$．よって，$(\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \wedge \neg \mathtt{Q}$は充足可能．

トートロジーと充足可能性の関係

定理 3.9.

1. Aはトートロジー $\iff$ $\neg A$は充足不能
2. Aは充足可能 $\iff$ $\neg A$はトートロジーでない

(証明)

1. Aはトートロジー

$\iff$ 任意の付値vについて，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$

(トートロジーの定義より)

$\iff$ 任意の付値vについて，$[\![\neg A]\!]_v = \mathrm{F}$ (解釈の定義より)

$\iff$ 任意の付値vについて，$[\![\neg A]\!]_v \neq \mathrm{T}$

$\iff$ $[\![\neg A]\!]_v = \mathrm{T}$となるような付値$v$は存在しない

$\iff$ $\neg A$は充足不能 (充足可能性の定義より)

2. 省略 $\square$

目次

モデルと反例

定義 3.10. Aを命題論理式，vを付値とする．$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$となるとき，vをAの**モデル**とよぶ．これを$v \models A$と記す．

定義 3.11. Aを命題論理式，vを付値とする．$[\![A]\!]_v = \mathrm{F}$となるとき，vをAの**反例**とよぶ．これを$v \not\models A$と記す．

例 3.12. 先に与えた付値v_0

$$v_0(\mathrm{P}_i) = \begin{cases} \mathrm{T} & (i\text{が偶数のとき}) \\ \mathrm{F} & (i\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

では，$[\![\mathrm{P}_3 \wedge \mathrm{P}_6 \to \mathrm{P}_1]\!]_{v_0} = \mathrm{T}$だったから，$v_0 \models \mathrm{P}_3 \wedge \mathrm{P}_6 \to \mathrm{P}_1$．つまり，$v_0$は$\mathrm{P}_3 \wedge \mathrm{P}_6 \to \mathrm{P}_1$のモデル．

演習 3.13. 命題論理式 $\mathrm{P}_3 \wedge \mathrm{P}_6 \to \mathrm{P}_1$ の反例を求めよ.

演習 3.13. 命題論理式$\mathtt{P}_3 \wedge \mathtt{P}_6 \to \mathtt{P}_1$の反例を求めよ．

$[\![(\mathtt{P}_3 \wedge \mathtt{P}_6) \to \mathtt{P}_1]\!]_{v_1} = \mathrm{F}$となるためには，$[\![\mathtt{P}_3 \wedge \mathtt{P}_6]\!]_{v_1} = \mathrm{T}$かつ$[\![\mathtt{P}_1]\!]_{v_1} = \mathrm{F}$となる必要がある．$[\![\mathtt{P}_3 \wedge \mathtt{P}_6]\!]_{v_1} = \mathrm{T}$となるためには，$[\![\mathtt{P}_3]\!]_{v_1} = [\![\mathtt{P}_6]\!]_{v_1} = \mathrm{T}$となる必要がある．

実際,

$$v_1(\mathtt{P}_i) = \begin{cases} \mathrm{T} & (i\text{が}\mathbf{3}\text{の倍数のとき}) \\ \mathrm{F} & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

とおくと，$[\![\mathtt{P}_3 \wedge \mathtt{P}_6]\!]_{v_1} = \mathrm{T}$，$[\![\mathtt{P}_1]\!]_{v_1} = \mathrm{F}$となり，$[\![(\mathtt{P}_3 \wedge \mathtt{P}_6) \to \mathtt{P}_1]\!]_{v_1} = \mathrm{F}$ となる．よって，v_1は反例.

P_3	P_6	P_1	$P_3 \wedge P_6$	$(P_3 \wedge P_6) \rightarrow P_1$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

青色の行の対応する付値は反例，赤色の行に対応する付値はモデル

トートロジーと，モデル・反例

定理 3.14.

1. A はトートロジー $\Longleftrightarrow$ A は反例をもたない
2. $\neg A$ はトートロジー $\Longleftrightarrow$ A はモデルをもたない

(証明)

1. A はトートロジー

$\Longleftrightarrow$ 任意の付値 v について，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$

(トートロジーの定義より)

$\Longleftrightarrow$ 任意の付値 v について，$[\![A]\!]_v \neq \mathrm{F}$

(真理値の定義より)

$\Longleftrightarrow$ 任意の付値 v について，v は反例でない

(反例の定義より) $\square$

演習 3.15.　同様にして，上記**2.**の証明を示せ.

演習 **3.15.**　同様にして，上記**2.**の証明を示せ．

(解答**)**

2. $\neg A$はトートロジー

$\Longleftrightarrow$ 任意の付値vについて，$[\![\neg A]\!]_v = \mathrm{T}$

(トートロジーの定義より**)**

$\Longleftrightarrow$ 任意の付値vについて，$[\![A]\!]_v = \mathrm{F}$

(解釈の定義より**)**

$\Longleftrightarrow$ 任意の付値vについて，vは反例

(反例の定義より**)**

$\Longleftrightarrow$ Aのモデルが存在しない

(モデルの定義より**)**

$\square$

充足可能性と，モデル・反例

定理 3.16.

1. Aは充足可能 $\Longleftrightarrow$ Aはモデルをもつ

2. $\neg A$は充足可能 $\Longleftrightarrow$ Aは反例をもつ

(証明)

1. Aは充足可能

$\Longleftrightarrow$ ある付値vについて，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$

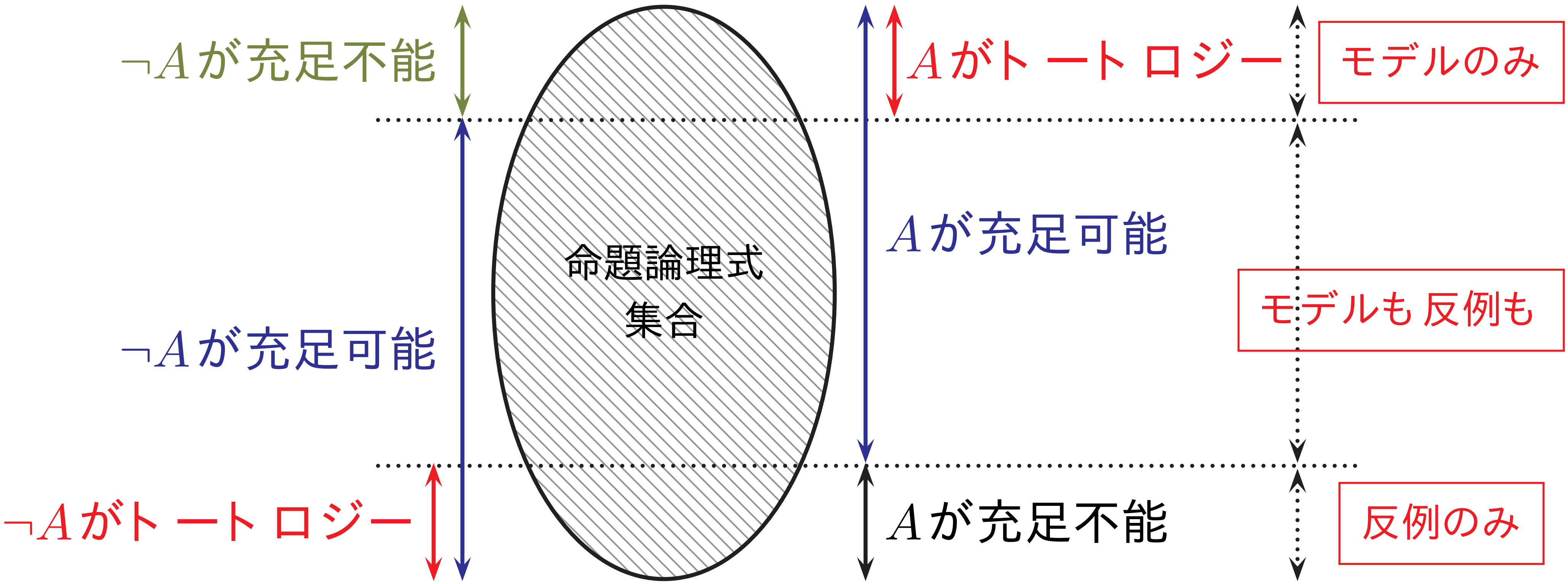
(充足可能性の定義より**)**

$\Longleftrightarrow$ Aのモデルが存在する **(**モデルの定義より**)**

2. 省略

$\square$

命題論理式集合の全体像



命題定数$\top$と$\bot$の導入

　モデルしか持たない場合や反例しか持たない場合は非常に重要であるので，これらを表わす0引数の命題結合子(命題定数)を導入し，命題論理式を拡張する．

$\top$ 　　真を表わす命題

読み方:「**top**」

$\bot$ 　　偽を表わす命題

読み方:「**bottom**」,「**bot**」,「矛盾」

定義 3.17. 命題論理式集合$\mathtt{Prop}$を以下のように与える：

$$
\begin{aligned}
P \in \mathtt{Var} &::= \mathtt{P} \mid \mathtt{Q} \mid \cdots \\
A, B \in \mathtt{Prop} &::= P \mid \top \mid \bot \mid (\neg A) \mid (A \land B) \mid (A \lor B) \\
&\qquad \mid (A \to B) \mid (A \leftrightarrow B)
\end{aligned}
$$

したがって，$\top \to (\mathtt{P} \to \bot)$などは命題論理式.

定義 3.18. $\top, \bot$の解釈を次のように定め，命題論理式の解釈を拡張する.

$$
\begin{aligned}
[\![\top]\!]_v &= \mathrm{T} \\
[\![\bot]\!]_v &= \mathrm{F}
\end{aligned}
$$

したがって，$v(\mathtt{P}) = \mathrm{T}$のとき，$[\![\mathtt{P} \to \bot]\!]_v = \mathrm{F}$. したがって，$[\![\top \to (\mathtt{P} \to \bot) \land \top]\!]_v = \mathrm{F}$.

目次

- 命題論理の意味論
- モデルと反例
- ブール関数

ブール関数 (boolean function)

付値を与えると解釈が定まるという関係は，もう少し直接的に，ブール関数という概念に対応する．

定義 3.19. f : $\mathtt{Bool}^n \to \mathtt{Bool}$ なる関数を (n 引数) ブール関数という．

例．以下で与えられる関数 f は 2 引数ブール関数である．

$$
\begin{array}{ll}
f(\mathrm{T},\mathrm{T}) = \mathrm{T} & f(\mathrm{T},\mathrm{F}) = \mathrm{F} \\
f(\mathrm{F},\mathrm{T}) = \mathrm{F} & f(\mathrm{F},\mathrm{F}) = \mathrm{T}
\end{array}
$$

例．2 引数ブール関数は $2^4 = 16$ 個ある．

例．0 引数ブール関数は，T, F の 2 個と考える．

命題結合子の解釈

命題結合子 $\wedge$ は，命題論理式 A, B からより複雑な命題論理式 $A \wedge B$ を構成する．このとき，$[\![A \wedge B]\!]_v$ の値は，$[\![A]\!]_v$ と $[\![B]\!]_v$ の値のみで決まるが，その値の対応は左下に示すブール関数 f となる：

$$
\begin{aligned}
f(\mathrm{T},\mathrm{T}) &= \mathrm{T}\\
f(\mathrm{T},\mathrm{F}) &= \mathrm{F}\\
f(\mathrm{F},\mathrm{T}) &= \mathrm{F}\\
f(\mathrm{F},\mathrm{F}) &= \mathrm{F}
\end{aligned}
$$

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

この関数は，$\wedge$ の真理値表 (右側) の役割に他ならない！

同様にして，それぞれの命題結合子の解釈について，対応するブール関数が存在する．

定義 3.20. ブール関数 bot, top, not, and, or, imp, iff を以下のように定義する.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{bot} &= \mathrm{F} \\
\mathsf{top} &= \mathrm{T} \\
\mathsf{not}(x) &= \begin{cases} \mathrm{F} & (x = \mathrm{T}\text{のとき}) \\ \mathrm{T} & (x = \mathrm{F}\text{のとき}) \end{cases} \\
\mathsf{and}(x, y) &= \begin{cases} \mathrm{T} & (x = y = \mathrm{T}\text{のとき}) \\ \mathrm{F} & (\text{それ以外}) \end{cases} \\
\mathsf{or}(x, y) &= \begin{cases} \mathrm{F} & (x = y = \mathrm{F}\text{のとき}) \\ \mathrm{T} & (\text{それ以外}) \end{cases} \\
\mathsf{imp}(x, y) &= \begin{cases} \mathrm{F} & (x = \mathrm{T},\ y = \mathrm{F}\text{のとき}) \\ \mathrm{T} & (\text{それ以外}) \end{cases} \\
\mathsf{iff}(x, y) &= \begin{cases} \mathrm{T} & (x = y\text{のとき}) \\ \mathrm{F} & (\text{それ以外}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

ブール関数bot, top, not, . . ., および，命題結合子$\bot, \top, \neg, \ldots$の解釈の対応は以下の定理によって与えられる．

定理 3.21. vを付値，A, Bを命題論理式とするとき，以下の性質が成立する．

$$
\begin{array}{lcl}
[\![\bot]\!]_v & = & \mathsf{bot} \\
[\![\top]\!]_v & = & \mathsf{top} \\
[\![\neg A]\!]_v & = & \mathsf{not}([\![A]\!]_v) \\
[\![A \wedge B]\!]_v & = & \mathsf{and}([\![A]\!]_v, [\![B]\!]_v) \\
[\![A \vee B]\!]_v & = & \mathsf{or}([\![A]\!]_v, [\![B]\!]_v) \\
[\![A \rightarrow B]\!]_v & = & \mathsf{imp}([\![A]\!]_v, [\![B]\!]_v) \\
[\![A \leftrightarrow B]\!]_v & = & \mathsf{iff}([\![A]\!]_v, [\![B]\!]_v)
\end{array}
$$

(証明) 解釈の定義およびbot, top, not, and, or, imp, iffの定義より． □

ブール関数bot, top, not, and, or, imp, iffを用いると，解釈の計算は以下のように式変形を使って出来る．

例．以下の付値v_0を考える．

$$v_0(\mathrm{P}_i) = \begin{cases} \mathrm{T} & (i\text{が偶数のとき}) \\ \mathrm{F} & (i\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

このとき，$[\![\mathrm{P}_3 \wedge \mathrm{P}_6 \to \mathrm{P}_1]\!]_{v_0}$を値を式変形で計算する．

$$\begin{aligned} [\![\mathrm{P}_3 \wedge \mathrm{P}_6 \to \mathrm{P}_1]\!]_{v_0} &= \mathsf{imp}([\![\mathrm{P}_3 \wedge \mathrm{P}_6]\!]_{v_0}, [\![\mathrm{P}_1]\!]_{v_0}) \\ &= \mathsf{imp}(\mathsf{and}([\![\mathrm{P}_3]\!]_{v_0}, [\![\mathrm{P}_6]\!]_{v_0}), [\![\mathrm{P}_1]\!]_{v_0}) \\ &= \mathsf{imp}(\mathsf{and}(\mathrm{F}, \mathrm{T}), \mathrm{F}) \\ &= \mathsf{imp}(\mathrm{F}, \mathrm{F}) \\ &= \mathrm{T} \end{aligned}$$

この式変形には，2種類の対象が含まれていることに注意.

(1) 命題論理式:

P_1，P_3，P_6，$\mathrm{P}_3 \wedge \mathrm{P}_6$，$(\mathrm{P}_3 \wedge \mathrm{P}_6) \to \mathrm{P}_1$.

(2) 真理値を表わす式:

$[\![\mathrm{P}_1]\!]_{v_0}$，$[\![\mathrm{P}_3]\!]_{v_0}$，$[\![\mathrm{P}_6]\!]_{v_0}$，and$([\![\mathrm{P}_3]\!]_{v_0}, [\![\mathrm{P}_6]\!]_{v_0})$，imp$(\mathrm{F}, \mathrm{F})$ など.

従って，この2種類を混同した式，例えば，$[\![\mathrm{P}_1]\!]_{v_0} \wedge [\![\mathrm{P}_2]\!]_{v_0}$ や and$(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ などは，おかしいことがわかるだろうか?

まとめ

- 付値と解釈 $[\![A]\!]_v$
- モデルと反例
- 命題定数 $\bot, \top$
- ブール関数

補足資料

以下は，本講義で用いる，集合・関係・関数といった基礎的な数学知識の簡単な紹介．この辺りの知識に不安のある者は参照のこと．

集合

- 集合 — 対象の集まりのこと
- 要素 **(**または元**)** — 集合を構成している対象のこと

数学的概念としてのポイント：

1. 2つの対象が同じものかどうかはっきりしている
2. ある対象が集合に入っているかどうかはっきりしている

定義 3.22. [集合の要素**]**

$$a \in U \overset{\text{def}}{\iff} \text{対象}\,a\,\text{が集合}\,U\,\text{の要素}$$

$$a \notin U \overset{\text{def}}{\iff} \text{対象}\,a\,\text{が集合}\,U\,\text{の要素でない}$$

$\overset{\text{def}}{\iff}$ は定義として同値，つまり，左辺を右辺により定義することを意味する.

よく用いる集合

$\mathbb{N} \overset{\text{def}}{=}$ (0を含む)自然数全体の集合$\{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Z} \overset{\text{def}}{=}$ 整数全体の集合 $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q} \overset{\text{def}}{=}$ 有理数全体の集合 分数

$\mathbb{R} \overset{\text{def}}{=}$ 実数全体の集合 有理数と無理数

集合の表記

定義 3.23. [集合の表記]

(1) $\{a_1, \ldots, a_n\} \stackrel{\text{def}}{=}$ 対象 $a_1, \ldots, a_n$ からなる集合

要素の順番は関係ない．どのような要素が含まれているかが問題.

$a_i \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ ($i = 1, \ldots, n$) が成立

(2) 内包表記

$\{x \mid A(x)\} \stackrel{\text{def}}{=}$ 性質 A を満たすものの集合

$\{x \in U \mid A(x)\} \stackrel{\text{def}}{=}$ 性質 A を満たす集合 U の要素の集合

$\{f(x) \mid A(x)\} \stackrel{\text{def}}{=}$ 性質 A を満たす x について $f(x)$ を集めた集合

例. $\{s \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^* \mid s = \mathsf{a}^*\mathsf{b}\}$ $\quad \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \le x \le 12\}$

$\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, 4 \le x \le 12\}$

内包表記の性質

内包表記の以下の性質はよく用いる.

$$a \in \{x \mid A(x)\} \iff A(a)$$
$$a \in \{x \in U \mid A(x)\} \iff a \in U \text{かつ} A(a)$$

例.

$$6 \in \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 12\} \iff 6 \in \mathbb{N} \text{かつ} 4 \leq 6 \leq 12$$
$$3 \in \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 12\} \iff 3 \in \mathbb{N} \text{かつ} 4 \leq 3 \leq 12$$

後者の例のように，両辺が正しくなくてもよい.

参考: $a \in \{x \in U \mid A(x)\} \iff a \in U$ かつ $A(a) \iff a \in \{x \mid x \in U, A(x)\}$

全称と 存在

「 x は偶数である」,「 $x^2 = 1$」，といった x に関する性質に基づいた命題として 2 通りの基本的な命題がある.

どのような x についても $A(x)$ が正しいことを表わす命題を「 任意の x について $A(x)$」,「 全ての x について $A(x)$」と書く．(記号では $\forall x A(x)$ と記す．$\forall$ を全称記号とよび，**forall** とよむ．)

ある x について $A(x)$ が正しいことを表わす命題を「 ある x が存在して $A(x)$」,「 $A(x)$ となる x が存在する」と書く．(記号で $\exists x A(x)$ と記す．$\exists$ を存在記号とよび，**exists** とよむ．)

"存在" は 1 個以上なら何個でも存在してよい.

全称と存在の関係

全称と存在(と否定)についての以下の関係(ド・モルガンの法則)は重要:

$$\textbf{not}\ (\forall x A(x)) \iff \exists x\ (\textbf{not}\ A(x))$$
$$\textbf{not}\ (\exists x A(x)) \iff \forall x\ (\textbf{not}\ A(x))$$

つまり,

「 全てのxについて$A(x)$が成立するわけではない」こととと

「 $A(x)$が成立しないようなxが存在する」ことは同値,

ということをいっている.

(例)「 全ての整数が偶数であるわけではない」$\iff$「 偶数でない整数が存在する」

集合の等価性と部分集合

以下はみな同じ集合:

$$\{1,2,3\},\ \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\},\ \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 4\}$$

つまり，集合の等しさは，表し方によらず，要素が等しいかだけで決まっている．

定義 3.24. [部分集合]
U, V を集合とする．U のどの要素も V の要素でもあるとき，$U \subseteq V$ と記し，U を V の部分集合であるという．

集合の等価性は，以下のように定義される．

定義 3.25. [集合の等価性]
$U = V \stackrel{\text{def}}{\iff} U \subseteq V$ かつ $V \subseteq U$

無限集合

集合概念の強力さは，無限集合を扱うところにある．

定義 3.26. [無限和集合，無限積集合]

$$\bigcup_{i\geq 0} U_i \stackrel{\mathbf{def}}{=} \{x \mid \exists i \geq 0\ (x \in U_i)\}$$
$$\bigcap_{i\geq 0} U_i \stackrel{\mathbf{def}}{=} \{x \mid \forall i \geq 0\ (x \in U_i)\}$$

演習 3.27. $i \in \mathbb{N}$とし，$U_i = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq i\}$とおく．このとき，$\bigcap_{i\geq 0} U_i$はどのような集合になるか?また，$V_i = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq i\}$とおくとき，$\bigcup_{i\geq 0} V_i$はどのような集合になるか?

$U_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $U_1 = \{1, 2, \ldots\}$, $U_2 = \{2, 3, \ldots\}$,$\ldots$

$$
\begin{array}{lcl}
U_0 & = & \{0, 1, 2, \ldots\} \\
U_1 & = & \{\quad 1, 2, \ldots\} \\
U_2 & = & \{\qquad 2, 3, \ldots\} \\
\multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
U_k & = & \{\qquad\qquad k, k+1, \ldots\} \\
U_{k+1} & = & \{\qquad\qquad\quad k+1, \ldots\}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
k \in \bigcap_{i \geq 0} U_i &\iff \forall i \geq 0\ (k \in U_i) \\
&\iff \forall i \geq 0\ (k \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq i\}) \\
&\iff \forall i \geq 0\ (k \in \mathbb{N}\text{かつ}\,k \geq i) \\
&\iff \text{偽}\ (i = k+1\text{をとると成立しない})
\end{aligned}
$$

つまり，どのようなkについても，$k \notin \bigcap_{i \geq 0} U_i$が成立する．
よって，$\bigcap_{i \geq 0} U_i = \emptyset$.

(同様にして計算すると，$\bigcup_{i \leq 0} V_i = \mathbb{N}$となる．)

対と直積集合

定義 3.28. [対]
xとyの対を$\langle x, y\rangle$と記す．対の等価性を以下のように定義する．　$\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x_1 = x_2$かつ$y_1 = y_2$

直積集合　**2**つの集合の要素の対からなる集合

$$U \times V = \{\langle x, y\rangle \mid x \in U, y \in V\}$$

例．$\{1, 2, 3\} \times \{A, B\} = \{\langle 1, A\rangle, \langle 2, A\rangle, \langle 3, A\rangle, \langle 1, B\rangle, \langle 2, B\rangle, \langle 3, B\rangle\}$

$U \times U$をU^2と略記する．U^2を一般化して，n重対集合U^nを考えることが出来る．

例．$\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

2項関係

直積集合の部分集合を，**2項関係**とよぶ.

Rが**2項関係** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} R \subseteq U \times V$

特に $R \subseteq U^2$ のとき，U 上の**2項関係**ともいう．また，$R \subseteq U^n$ なる RのことをU 上のn項関係という.

例．$\{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ は $\{0, 1, 2\}$ 上の**2**項関係.

$\langle a, b\rangle \in R$を aRbと略記することが多い.

例．自然数の大小を表す $\leq$ は自然数上の**2**項関係である.
$\leq = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists z \in \mathbb{N}\ (x + z = y)\}$.

2項関係の性質

RをU上の**2**項関係とする.

R: 反射的 $\overset{\text{def}}{\iff} \forall x (xRx)$

R: 推移的 $\overset{\text{def}}{\iff} \forall x, y, z\, ((xRy$ かつ $yRz)$ ならば $xRz)$

R: 対称的 $\overset{\text{def}}{\iff} \forall x, y\, (xRy$ ならば $yRx)$

R: 反対称的 $\overset{\text{def}}{\iff} \forall x, y\, ((xRy$ かつ $yRx)$ ならば $x = y)$

R: 同値関係 $\overset{\text{def}}{\iff}$ R: 反射的，推移的かつ対称的

R: 半順序 $\overset{\text{def}}{\iff}$ R: 反射的，推移的かつ反対称的

例 **3.29.**　次の関係は上にあげた性質のうちどれを満たすか？

(1) 自然数上の，**3**で割った余りが等しい，という関係

(2) 正整数上の，割り切れる，という関係

関数

定義 3.30. [関数]
関係 $f \subseteq U \times V$ が以下の条件を満たすとき，f を集合 U から集合 V への関数とよぶ：任意の $x \in U$ に対して，$x\,f\,y$ となる $y \in V$ が丁度**1**つだけ存在する．関数 f が，集合 U から集合 V への関数であることを明示するとき，$f : U \to V$ と記述することがある．また，$x \in U$ に対して，$x\,f\,y$ となる **(**唯**1**つある**)**y を $f(x)$ と記す．

関係が関数のとき，R ではなく $f, g, \ldots$ 等の記号を用いることが多い．U が n 重対集合のとき，f は n 引数関数となり，$f(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle)$ の代わりに $f(x_1, \ldots, x_n)$ と記す．

例． $- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$