日本ソフトウェア科学会第 29 回大会 (2012 年度) 講演論文集

木オートマトンに基づく項書き換えシステムの逆計算

椛澤 涼　青戸 等人　外山 芳人

項書き換えシステムの部分クラスである構成子システムと基底構成子項に対する逆計算問題を考察し，逆計算を求める木オートマトンの構成手続きを完備化手法にもとづいて提案する．さらに，この完備化手続きが成功した場合には，手続きによって構成された木オートマトンによって，項書き換えシステムの逆計算は判定可能となることを証明する．

1　はじめに

与えられた集合に対する項書き換えシステムの到達可能性は，リダクションの正規戦略や合流性条件の判定などに広く使われている [2] [3] [4] [6] [7]．到達目標を木オートマトンで認識可能な集合とした場合には，与えられた木オートマトンから完備化手法にもとづいて新しい木オートマトンを構成し，その木オートマトンをもちいて項書き換えシステムの到達可能性を判定する方法がいくつか提案されている [4] [6] [7]．しかし，これらの構成方法の多くは，書き換え規則における変数出現の深さを制限したり，変数の線形性を仮定するなど，書き換え規則の変数出現になんらかの制限をもうけている．

近年，関数型言語の逆計算を求める木オートマトンの構成手続きが提案された [5]．これを項書き換えシステムの到達可能性問題と捉えると，項書き換えシステムを構成子システムの部分クラスに制限し，到達目標をひとつの基底構成子項とすることで，書き換え規則の変数出現に関する制限を緩めることに成功したとみなすことができる．

本研究では，文献 [5] の枠組みを一般化した変数保存な構成子システムにおける逆計算問題を考察し，逆計算を求める木オートマトンの構成手続きを完備化手法にもとづいて提案する．この完備化手続きが成功した場合には，手続きによって構成された木オートマトンによって，項書き換えシステムの逆計算は判定可能となる．

2　準備

ここでは，本論文でもちいる定義および記法を文献 [1] [6] [7] にもとづいて紹介する．

2.1　項書き換えシステム

関数記号集合および変数集合を F, V で表す．F, V 上の項の集合を $T(F, V)$ で表す．t に現れる変数の集合を $V(t)$ と記す．$V(t) = \emptyset$ となる t を基底項とよび，基底項の集合を $T(F)$ と記す．$F = D \cup C$，D は定義記号集合，C は構成子記号集合とし，構成子項，基底構成子項はそれぞれ $T(C, V)$，$T(C)$ と記す．

ホール $\Box$ は特別な定数記号であり，$C[t]$ は文脈 C のホールを項 t で置き換えて得られる項を表す．$t = C[u]$ のとき u は t の部分項といい $u \trianglelefteq t$ と記す．代入 θ は変数集合 V から項の集合 $T(F, V)$ への写像であり，代入 θ による項 t への代入は $\theta(t)$，または $t\theta$ で表す．また，$\mathrm{dom}(\theta) = \{x \mid x\theta \neq x\}$，$\mathrm{ran}(\theta) = \{x\theta \mid x \in \mathrm{dom}(x)\}$ とし，$V' = \mathrm{dom}(\theta)$，$\mathrm{ran}(\theta) \subseteq T$ のとき，$\theta : V' \to T$ と記す．

$l \notin V$ かつ $V(r) \subseteq V(l)$ なる項 l, r の対を書き

Inverse Computation for Term Rewriting Systems based on Tree Automata

Ryo Kabasawa, Takahito Aoto, Yoshihito Toyama, 東北大学電気通信研究所, Research Institute of Electrical Communication, Tohoku University.

換え規則とよび $l \to r$ と記す．書き換え規則の集合 R を項書き換えシステムという．ある書き換え規則 $l \to r \in R$，文脈 C，代入 θ が存在するとき，項 $s = C[l\theta]$ は項 $t = C[r\theta]$ に書き換えることができる．この書き換え関係を $s \to_R t$ あるいは $s \to t$ と表し，$\to$ の反射推移閉包を $\to^*$ と記す．項 t が $\to_R$ でこれ以上書き換えられないとき，t は R の正規形という．R の正規形の集合を NF_R と記す．項書き換えシステム R が構成子システムであるとは，すべての書き換え規則が $f(l_1, ..., l_m) \to r$，$f \in D$，$l_1, ..., l_m \in T(C, V)$ となっていることをいう．また，R が変数保存とは，すべての $l \to r \in R$ に対して $V(l) = V(r)$ となることをいう．本論文では，項書き換えシステム R として変数保存な構成子システムを考える．

2.2 木オートマトン

木オートマトン $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A} = \langle F, Q, Q_f, \Delta\rangle$ で表され，F は関数記号集合，Q は状態集合，Q_f は受理状態集合，Δ は遷移規則集合である．$\to_{\mathcal{A}}$ は Δ を書き換え規則とみなしたときの書き換え関係を表す．基底項 t が $t \to^*_{\mathcal{A}} q \in Q_f$ となるとき，t は $\mathcal{A}$ によって受理されるという．$\mathcal{A}$ によって受理される言語を $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{t \in T(F) \mid \exists q \in Q_f.\ t \to^*_{\mathcal{A}} q\}$ で表す．木オートマトン $\mathcal{A}$ が決定的であるとは，任意の関数記号 $f \in F$，状態 $q_1, ..., q_m \in Q$ に対して $f(q_1, ..., q_m) \to q \in \Delta$ の形をした規則が高々1 つしかないことである．以下では，状態代入 θ は変数集合 V から状態集合 Q への写像を表す．

3 木オートマトンを用いた逆計算手続き

項書き換えシステム R に対する基底構成子項 $s \in T(C)$ の逆計算を $\mathcal{L}_s = \{t \in T(F) \mid t \to^*_R s\}$ と定める．このとき，$\mathcal{L}_s = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ となる木オートマトンを R に対する逆計算木オートマトンいう．以下では，逆計算木オートマトン $\mathcal{A}$ の構成法を考える．

例 1 (加算)．自然数上の加算の項書き換えシステム R と基底構成子項 $S(S(0))$ が与えられたとき，$\mathcal{L}_{S(S(0))} = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ をみたす逆計算木オートマトン $\mathcal{A}$ を構成する．

$$R = \begin{cases} 0 + y & \to \quad y \qquad (1) \\ S(x) + y & \to \quad S(x+y) \qquad (2) \end{cases}$$

まず，項 $S(S(0))$ を受理する逆計算木オートマトン $\mathcal{A}_0 = \langle F, Q, Q_f, \Delta_0\rangle$ を以下のように構成する．$Q = \{q_0, q_{S(0)}, q_{S(S(0))}\}$，$Q_f = \{q_{S(S(0))}\}$，$\Delta_0 = \{0 \to q_0, S(q_0) \to q_{S(0)}, S(q_{S(0)}) \to q_{S(S(0))}\}$．はじめに，状態 q_0 に書き換え規則 (1) を逆向きに適用することで $0 + q_0$ が得られ，$0 \to_{\Delta_0} q_0$ を適用すると $q_0 + q_0$ となるので，$q_0 + q_0 \to q_0$ という遷移規則を Δ_0 に追加して Δ_1 を得る．

同様に状態 $q_{S(0)}$ について考えると，書き換え規則 (1) を逆向きに適用し $q_0 + q_{S(0)} \to q_{S(0)}$ が得られ，Δ_1 に追加して，Δ_2 を得る．

次に $S(q_0 + q_0)$ について考えると，$S(q_0 + q_0) \to_{\Delta_2} q_{S(0)}$ となり，書き換え規則 (2) を逆向きに適用すると $S(q_0) + q_0$ となる．$S(q_0) + q_0 \to_{\Delta_1} q_{S(0)} + q_0$ となるので，新たに $q_{S(0)} + q_0 \to q_{S(0)}$ を Δ_2 に追加して，Δ_3 を得る．

同様の操作を繰り返すと，遷移規則が以下の Δ となった時点で追加できる遷移規則が尽きる．この木オートマトン $\mathcal{A}$ は逆計算木オートマトンになっている．

$$\Delta = \begin{cases} 0 & \to \quad q_0 \\ S(q_0) & \to \quad q_{S(0)} \\ S(q_{S(0)}) & \to \quad q_{S(S(0))} \\ q_0 + q_0 & \to \quad q_0 \\ q_0 + q_{S(0)} & \to \quad q_{S(0)} \\ q_{S(0)} + q_0 & \to \quad q_{S(0)} \\ q_0 + q_{S(S(0))} & \to \quad q_{S(S(0))} \\ q_{S(0)} + q_{S(0)} & \to \quad q_{S(S(0))} \\ q_{S(S(0))} + q_0 & \to \quad q_{S(S(0))} \end{cases}$$

例 1 の構成法を参考にして入力 s から，項書き換えシステム R の逆計算 $\mathcal{L}_s$ を求める逆計算木オートマトン $\mathcal{A}$ を構成する手続きを以下のように与える．

逆計算木オートマトンの構成手続き

入力： 変数保存な構成子システム R
　　　基底構成子項 $s \in T(C)$

出力： $\mathcal{L}_s = \{t \mid t \to^*_R s\} = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ をみたす
　　　逆計算木オートマトン $\mathcal{A}$

1. $\mathcal{A}_0 = \langle F, Q, \{q_s\}, \Delta_0\rangle$，$Q = \{q_{s'} \mid s' \trianglelefteq s\}$，$\Delta_0 =$

$\{c(q_{s_1},...,q_{s_m}) \to q_{c(s_1,...,s_m)} \mid c(s_1,...,s_m) \trianglelefteq s\}$ を構成する．$n = 0$ とおく，

2. $\mathcal{A}_n = \langle F, Q, \{q_s\}, \Delta_n \rangle$ とする．$r\theta \to^*_{\mathcal{A}_n} q \in Q$, $l\theta \not\to^*_{\mathcal{A}_n} q \in Q$ となる $l \to r \in R$ および $\theta : V \to Q$ を求める．これらが存在しなければ $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n$ を出力して終了する．

これらが存在するときは，$l\theta \to^*_{\mathcal{A}_n} f(q_1,...,q_m) \in NF_{\mathcal{A}_n}$ なる $f(q_1,...,q_m)$ を求めて $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{f(q_1,...,q_n) \to q\}$ とする．このような $f(q_1,...,q_m)$ が存在しなければ失敗して終了．

3. $n := n + 1$ として 2 へ戻る．

上記の手続きでは，特に $\mathcal{A}_0$ は決定的な木オートマトンとなり，$\forall s' \trianglelefteq s.\ \forall u \in T(C \cup Q).\ s' \to^*_{\mathcal{A}_0} u \Rightarrow u \to^*_{\mathcal{A}_0} q_{s'}$ となること，特に $s' \to^*_{\mathcal{A}_0} q_{s'}$，$\mathcal{L}(\mathcal{A}_0) = \{s\}$ となることに注意する．また $f(q_1,...,q_m) \to q \in \Delta_n \setminus \Delta_0$ ならば $f \in D$ となること，手続きが終了して $\mathcal{A}$ が得られたとき，$\forall l \to r \in R.\ \forall \theta : V \to Q.\ r\theta \to^*_{\mathcal{A}} q \Rightarrow l\theta \to^*_{\mathcal{A}} q$ となることにも注意する．

4 構成手続きの正当性

本節では，前節の逆計算木オートマトンの構成手続きの正当性について考察する．

補題 1. 手続き 2 で $f(l_1,...,l_m) \to r$ と $\theta : V \to Q$ に対して遷移規則 $f(p_1,...,p_m) \to p \in \Delta_{n+1}$ が追加されたものとすると，ある代入 $\sigma : V \to T(C)$ が存在し，$\forall i (1 \leq i \leq n).\ p_i = q_{l_i\sigma}$ と，$r\sigma \to^*_{\mathcal{A}_n} p$ が成立する．

証明. 手続きの条件から $f(l_1\theta,...,l_m\theta) \to^*_{\mathcal{A}_n} f(p_1,...,p_m)$ および $r\theta \to^*_{\mathcal{A}_n} p$ が成立することに注意する．$Q = \{q_{s'} \mid s' \trianglelefteq s\}$，$\theta : V \to Q$ と $l_1,...,l_m \in T(C,V)$ より，$l_i\theta \in T(C \cup Q)$．よって $l_i\theta \to^*_{\mathcal{A}_n} p_i$ で適用できるのは Δ_0 の規則のみである．このとき，$\forall x \in V(f(l_1,...,l_m))$ に対して $\sigma(x) = s' \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \theta(x) = q_{s'}$ なる代入 $\sigma : V \to T(C)$ を考えると，$\forall x \in V(f(l_1,...,l_m)).\ x\sigma \to^*_{\mathcal{A}_n} x\theta$. $l\sigma \to^*_{\mathcal{A}} l\theta$ より $l_i\theta \to^*_{\mathcal{A}_0} q_{l_i\sigma}$．ゆえに，$\mathcal{A}_0$ の決定性より $q_{l_i\sigma} = p_i$ となる．よって，$r\sigma \to^*_{\mathcal{A}_n} r\theta \to^*_{\mathcal{A}_n} p$. □

補題 2. 任意の $t \in T(F)$，$s' \trianglelefteq s$ について，$t \to^*_{\mathcal{A}_n} q_{s'} \Rightarrow t \to^*_R s'$.

証明. n に関する帰納法で証明する．

(B.S.) $n = 0$ のときは明らか.

(I.S.) n について成立するとして，$t \to^*_{\mathcal{A}_{n+1}} q_{s'} \Rightarrow t \to^*_R s'$ を $t \to^*_{\mathcal{A}_{n+1}} q_{s'}$ における $\Delta_{n+1} \setminus \Delta_n$ の遷移規則の出現回数 k についての帰納法で証明する．$k = 0$ のときは，$t \to^*_{\mathcal{A}_n} q_{s'}$ となるので，帰納法の仮定より明らか．$k > 0$ のとき，$t = C[f(t_1,...,t_m)] \to^*_{\mathcal{A}_n} C[f(p_1,...,p_m)] \to_{\mathcal{A}_{n+1}} C[p] \to^*_{\mathcal{A}_{n+1}} q_{s'}$ とおける．$f(p_1,...,p_m) \to p \in \Delta_{n+1} \setminus \Delta_n$ が $f(l_1,...,l_m) \to r$ と $\theta : V \to Q$ に対して追加されたものとすると，補題 1 より，代入 $\sigma : V \to T(C)$ が存在して $f(p_1,...,p_m) = f(q_{l_1\sigma},...,q_{l_m\sigma})$ かつ $r\sigma \to^*_{\mathcal{A}_n} p$. よって，$t_i \to^*_{\mathcal{A}_n} p_{l_i\sigma}$ となるので，帰納法の仮定より $t_i \to^*_R l_i\sigma$．したがって，$t = C[f(t_1,...,t_m)] \to^*_R C[f(l_1\sigma,...,l_m\sigma)] = C[f(l_1,...,l_m)\sigma] \to_R C[r\sigma] \to^*_{\mathcal{A}_n} C[p] \to^*_{\mathcal{A}_{n+1}} q_{s'}$ が成立する．ここで，$C[r\sigma] \to^*_{\mathcal{A}_{n+1}} q_{s'}$ に出現する $\Delta_{n+1} \setminus \Delta_n$ の遷移規則の個数は $k - 1$ 以下となる．よって，帰納法の仮定より，$C[r\sigma] \to^*_R s'$．以上より，$t \to^*_R C[r\sigma] \to^*_R s'$. □

補題 3 (健全性)．$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}_s$.

証明. $Q_f = \{q_s\}$ より $t \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ とすると $t \to^*_{\mathcal{A}} q_s$ となる．よって，補題 2 より $t \to^*_R s$ となるので，$t \in \mathcal{L}_s$. □

補題 4. 任意の $t \in T(F)$，$s' \trianglelefteq s$ について，$t \to^*_R s' \Rightarrow t \to^*_{\mathcal{A}} q_{s'}$.

証明. $t \to^n_R s'$ とし，n に関する帰納法で証明する．

(B.S.) $n = 0$ のときは明らか.

(I.S.) このとき $f(l_1,...,l_m) \to r \in R$ に対して，$t = C[f(l_1,...,l_m)\sigma] \to_R C[r\sigma] \to^n_R s'$ となる．ここで，帰納法の仮定より，$C[r\sigma] \to^*_{\mathcal{A}} q_{s'}$ となる．したがって，$C[r\sigma] \to^*_{\mathcal{A}} C[r\theta] \to^*_{\mathcal{A}} C[p] \to^*_{\mathcal{A}} q_{s'}$ なる代入 $\theta : V \to Q$ が存在する．一方，$\mathcal{A}$ の構成法と $V(l) = V(r)$ および，$r\theta \to^*_{\mathcal{A}} p$ より，$f(l_1,...,l_m)\theta \to^*_{\mathcal{A}} p$ となる．また，$r\sigma \to^*_{\mathcal{A}} r\theta$ より $l\sigma \to^*_{\mathcal{A}} l\theta$ となるので，$t = C[f(l_1,...,l_m)\sigma] = C[f(l_1\sigma,...,l_m\sigma)] \to^*_{\mathcal{A}} C[f(l_1\theta,...,l_m\theta)] \to^*_{\mathcal{A}} C[p] \to^*_{\mathcal{A}} q_{s'}$ となる．以上よ

り，$t \to^*_{\mathcal{A}} q_{s'}$. □

補題 5 (完全性). $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \supseteq \mathcal{L}_s$.

証明. $t \in \mathcal{L}_s$ とすると $t \to^*_R s$. よって補題 4 より $t \to^*_{\mathcal{A}} q_s$. $Q_f = \{q_s\}$ より $t \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. □

定理 1 (正当性). $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_s$.

証明. 補題 3, 5 より明らか. □

5 まとめと今後の課題

本論文では，項書き換えシステムの部分クラスである変数保存な構成子システム R を考え，R と基底構成子項 s に対する逆計算 $\mathcal{L}_s$ を求めるための逆計算木オートマトン $\mathcal{A}$ を構成する手続きを提案した．さらに，手続きで作られた逆計算木オートマトン $\mathcal{A}$ の健全性と完全性の証明を行った．より一般的なクラスの項書き換えシステムに対する逆計算木オートマトンの構成法は今後の課題である．

参 考 文 献

[1] F. Baader and T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[2] M. Dauchet, T. Heuillard, P. Lescanne, S. Tison, Decidability of the confluence of finite ground term rewrite systems and of other related term rewrite systems, *Information and Computation*, Vol. 88, pp. 187–201, 1990.

[3] T. Genet, Decidable approximations of sets of descendants and sets of normal forms, *Proc. of RTA 1998*, LNCS, Vol. 1379, pp. 151–165, 1998.

[4] F. Jacquemard, Decidable approximations of term rewriting systems, *Proc. of RTA 1996*, LNCS, Vol. 1103, pp. 362–376, 1996.

[5] K. Matsuda, and K. Inaba, and K. Nakano, Polynomial-time inverse computation for accumulative functions with multiple data traversals, *Proc. of PEPM 2012*, pp. 5–14, 2012.

[6] T. Nagaya, Y. Toyama, Decidability for left-linear growing term rewriting systems, *Information and Computation* Vol. 178, pp. 499–514, 2002.

[7] T. Takai, Y. Kaji, H. Seki, Right-linear bouded finite path overlapping rewrite systems effectively preserve recognizability, *Scienticae Mathematicae Japonicae*, Vol. 72, No. 2, pp. 127–153, 2010.